

1. 与式より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3t^2x \\ \frac{dx}{x} &= 3t^2dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int 3t^2dt \\ \log|x| &= t^3 + C \quad (C \text{ は定数}) \\ x &= \pm e^C e^{t^3}.\end{aligned}\tag{A1}$$

よって、 $\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと、一般解は $x = Ae^{t^3}$ となります。初期値は $x(0) = 1$ ですから、 $t = 0, x = 1$ を代入すると $1 = A$ となり、特殊解は $x = e^{t^3}$ となります。■

2. 与式より

$$\begin{aligned}t \frac{dx}{dt} &= ax \\ \frac{dx}{x} &= \frac{a}{t} dt \\ \int \frac{dx}{x} &= \int \frac{a}{t} dt \\ \log|x| &= a \log|t| + C \quad (C \text{ は定数}) \\ \log|x| &= \log(|t|^a) + C \\ x &= \pm e^C t^a.\end{aligned}\tag{A2}$$

よって、 $\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと、一般解は $x = At^a$ となります。初期値は $x(1) = 1$ ですから、 $t = 1, x = 1$ を代入すると $1 = A$ となり、特殊解は $x = t^a$ となります。■

3. 与式より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + ax + b &= 0 \\ dx &= -(ax + b)dt \\ -\frac{dx}{ax + b} &= dt \\ -\int \frac{dx}{ax + b} &= \int dt \\ -\frac{1}{a} \log|ax + b| &= t + C \quad (C \text{ は定数}) \\ \log|ax + b| &= a(-C - t) \\ ax + b &= \pm e^{-aC} e^{-at} \\ x &= \pm \frac{e^{-aC}}{a} e^{-at} - \frac{b}{a}\end{aligned}\tag{A3}$$

よって、 $\pm \frac{e^{-aC}}{a}$ をあらためて定数 A とおくと一般解は $x = Ae^{-at} - \frac{b}{a}$ となります。初期値は $x(0) = \frac{1-b}{a}$ ですから、これを代入すると $\frac{1-b}{a} = A - \frac{b}{a}$ より $A = \frac{1}{a}$ で、特殊解は $x = \frac{e^{-at} - b}{a}$ となります。■