2024年度春学期

応用数学(解析)

第2部・基本的な微分方程式 ／

第6回
変数分離形の変形

関西大学総合情報学部
浅野 晃

変数分離形(復習)🤔

変数分離形

一般には　$g(x)x' = f(t)$

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると　$g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを積分すると　$$\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$$

一般解に含まれる積分定数 C は，
初期値を代入して定まり，特殊解が得られる

今日は，変形によって変数分離形に持ち込める方程式です

---

1. 同次形🤔

同次形

一般には $\dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$　　x/t の式になっている

$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと　$x = ut$　この両辺を微分　$\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

積の微分

よって　$t\dfrac{du}{dt} + u = f(u)$

$\dfrac{1}{f(u) - u}du = \dfrac{1}{t}dt$　　変数分離形になった

同次関数

関数 $M(x,t)$ が k 次の同次関数であるとは

$M(ut,t) = t^k M(u,1)$ の形になっていること　t^k をくくり出せる

微分方程式が $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{M(x,t)}{N(x,t)}$ の形で

M, N がどちらも k 次の同次関数なら，$x = ut$ とおいて

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{M(x,t)}{N(x,t)} \\ &= \frac{t^k M(u,1)}{t^k N(u,1)} = \frac{M(u,1)}{N(u,1)} = \frac{M(\frac{x}{t},1)}{N(\frac{x}{t},1)}\end{aligned}$$

前ページの形になる

例題

$x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ を解いて，一般解を求めよ。

分母分子を t でわると $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1-\frac{x}{t}}{1+\frac{x}{t}}$　【同次形】

$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと　$x = ut$　より　$\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

よって　$t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{1-u}{1+u}$

$\dfrac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u}du = \dfrac{1}{t}dt$　　t と u を分離

$\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\dfrac{1}{t}dt$

例題(続き)

$x' = \dfrac{t-x}{t+x}$ を解いて，一般解を求めよ。

微分の関係になっている　$\dfrac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\dfrac{1}{t}dt$

ここで u^2+2u-1 の微分が $2(u+1)$になるから，上の式の両辺を積分すると

$\dfrac{1}{2}\log(|u^2+2u-1|) = -\log|t| + C$　　対数の和 → 真数の積

$\log(|u^2+2u-1|) = \log(A|t|^{-2})$　　対数の○倍 → 真数の○乗

$t^2(u^2+2u-1) = A$

定数は任意なので，絶対値が外れる

$u = \dfrac{x}{t}$ に戻すと $x^2 + 2tx - t^2 = A$

2. 1階線形🤔

1階線形微分方程式

一般には $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ の形になっているもの

$p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ とおくと，一般解は $x = \frac{1}{p(t)}\left(\int p(t)Q(t)dt + C\right)$

なぜならば

$$(p(t)x)' = (p(t))'x + p(t)x'$$ 積の微分

$$= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right)\right]' x + p(t)x'$$

$$= p(t)P(t)x + p(t)x'$$ 指数の合成関数の微分

$$= p(t)\left\{P(t)x + x'\right\} = p(t)Q(t)$$

よって，両辺を積分して $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

例題

$x' + x = t$ を解いて，一般解を求めよ。

$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) \equiv 1,\ Q(t) = t$

よって $p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ とすると $p(t) = \exp\left(\int 1dt\right)$

$$= e^{t+C_1} = e^{C_1}e^t$$

$$= C_2e^t$$

前ページの式から $p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$

$$C_2e^tx = \int C_2e^ttdt + C_3$$

$\frac{C_3}{C_2} = C \longrightarrow e^tx = \int e^ttdt + C$

部分積分

$$= e^tt - \int e^tdt + C$$

$$= e^tt - e^t + C$$

よって

$$x = t - 1 + Ce^{-t}$$

2′．ベルヌーイの微分方程式🤔

ベルヌーイの微分方程式

一般には $\dfrac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ の形 $(n \neq 1)$

$u = x^{1-n}$ とおくと1階線形微分方程式に変形できる

なぜならば

$$\frac{1}{x}x' + P(t) = Q(t)x^{n-1}$$

$$\log u = (1-n)\log x$$

両辺を微分する

$$\frac{u'}{u} = (1-n)\frac{x'}{x}$$

代入

$$\frac{1}{1-n}\frac{u'}{u} + P(t) = Q(t)\frac{1}{u}$$

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t)$$ 1階線形

例題

$x' + tx = tx^2$ が1階線形微分方程式で表せることを示せ。

$u = x^{-1}$ とおく

両辺の対数をとると $\log u = -\log x$

両辺を t で微分すると $\dfrac{u'}{u} = -\dfrac{x'}{x}$

両辺を x で割ると $\dfrac{x'}{x} + t = tx$

$$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u} \xrightarrow{-u\text{ 倍}} u' - tu = -t$$ 1階線形

演習問題の解説🤔

演習問題(1)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

与式の右辺の分母分子を t で割ると, $x' = \dfrac{\frac{x}{t} - 1}{2}$ となるので,

同次形の微分方程式

$\dfrac{x}{t} = u$ とおくと → $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{u-1}{2}$

$x = ut$ なので $\dfrac{dx}{dt} = t\dfrac{du}{dt} + u$

$$t\frac{du}{dt} + u = \frac{u-1}{2}$$

演習問題(1)(続き)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{u-1}{2}$ より $t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u+1}{2}$ なので

$\dfrac{du}{u+1} = -\dfrac{dt}{2t}$ と変数分離できる

両辺を積分すると $\displaystyle\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$

演習問題(1)(続き)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$\displaystyle\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}$ より

$\log|u+1| = -\dfrac{1}{2}\log|t| + C$ （C は定数）

$\log|t|^{-\frac{1}{2}}$ と表せる　$\log e^C$ と表せる

$u+1 = \pm e^C|t|^{-\frac{1}{2}}$

$\pm e^C = A$ とおくと $u+1 = A|t|^{-\frac{1}{2}}$

演習問題(1)(続き)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$u+1 = A|t|^{-\frac{1}{2}}$ より $u = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおいていたので，これを代入すると $\dfrac{x}{t} = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$

すなわち，一般解は $x = -t + A\sqrt{|t|}$

演習問題(2)

$tx' - x = 1$ の一般解を求めよ

与式より $x' - \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{t}$

1階線形方程式の一般形 $x' + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると　$P(t) = -\dfrac{1}{t},\ Q(t) = \dfrac{1}{t}$

$p(t) = \exp\displaystyle\int P(t)dt$ とおくと，
$$\begin{aligned} p(t) &= \exp\left(-\int \frac{1}{t}dt\right) \\ &= \exp(-\log t + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1}) + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1})\exp(C_1) \\ &= C_2\frac{1}{t} \end{aligned}$$

（C_1, C_2 は定数）

演習問題(2)(続き)

$tx' - x = 1$ の一般解を求めよ

$p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$ となることから（C は定数） $Q(t) = \frac{1}{t}$ より

$$C_2\frac{1}{t}x = \int C_2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}dt + C_3$$

$$\frac{1}{t}x = \int \frac{1}{t^2}dt + C_4$$

（C_3, C_4, C は定数）

$$\frac{1}{t}x = -\frac{1}{t} + C$$

$$x = -1 + Ct$$

すなわち，一般解は $x = -1 + Ct$

今日のまとめ

同次形

1階線形

ベルヌーイ