2024年度春学期

応用数学(解析)

第2部・基本的な微分方程式 ／

第7回
2階線形微分方程式(1)

関西大学総合情報学部
浅野 晃

2階線形微分方程式とは🤔

2階線形微分方程式

一般には $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$

ここが恒等的に0なのが[斉次]
そうではないのが[非斉次]

一番簡単なのは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

とりあえず，$x \equiv 0$ は解[自明解]

それ以外には？

2階線形微分方程式の解

とりあえず $x'' + ax' + bx = 0$ に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$$

$$\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) e^{\lambda t} = 0$$

ここが 0 になるような λ については
$x = e^{\lambda t}$ は解，その定数倍も解

λ の2次方程式だから，みたす λ はたいてい2つ λ_1, λ_2

一般解は $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ $x \equiv 0$ を含む

おわり😪

こんなんでいいのか？🌀

本当に一般解であるためには

$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ が本当に一般解であることは,
以下の2項目が正しいことと同じ

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると, 特殊解はひとつに定まる

初期値はこの2つ

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば,
一般解は $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ で表される

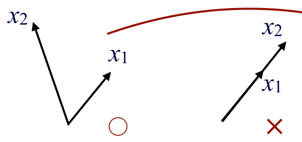
本当に一般解であるためには

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば,
一般解は $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ で表される

2つの関数が1次独立とは

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは, $C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



解全体は
2次元ベクトル空間をなす

本当に一般解であるためには

1. 解が一意
2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

さっきの例では

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら1次独立

一般解は $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ だけで，他にはない

一般の斉次形 n 階線形微分方程式
(定数係数でない場合も含む)についてなりたつ

定数係数の場合に，証明してみる

行列で表現する

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ を，$x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned}$$ と表す

行列で $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

1階線形微分方程式の形になる

何階線形微分方程式でも，この形にできる

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに，解がひとつだけに決まることを，
解が一意(unique)であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき，初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら，その初期値について一意

x のわずかな変化について，
f がいくらでも大きく変化する，ということはない

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の右辺について，関数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を考えると

$\| (A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)) - (A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)) \| = \|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\|$ であり，

$\|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\| \leqq \|A(t)\| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ となるようなノルムが存在する

ユークリッドノルムならそうなる

ノルムが連続なら，任意の有界閉区間で上限が存在する

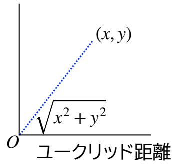
リプシッツ条件が成り立ち，一意

ところで，「距離」について

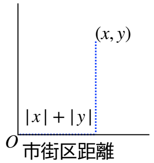
「ノルム」は，「距離」を一般的にしたもの

2点 x, y の間の「距離」 $d(x, y)$ とは？

任意の x, y について，
以下の性質（距離の公理）をもつものをいう



ユークリッド距離
（L^2 ノルム）



市街区距離
（L^1 ノルム）

1. $d(x, y) \geqq 0$ 距離は正またはゼロ
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 「距離ゼロ」と「同一点」は同じ意味
3. $d(x, y) = d(y, x)$ 距離はどちらから測っても同じ
4. $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ 回り道をすると距離は同じか長い（三角不等式）

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
一般解は $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ で表される

斉次形の場合を考える $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ テキストでは n 階の場合を示しているが，ここでは2階の場合を示す

まず，

一般解を $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $\boldsymbol{x}(t_0) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ の形で表せる

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ は，2次元の基本ベクトル

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の特殊解を，2つ考える

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたすもの $\xi_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたすもの $\xi_2(t)$

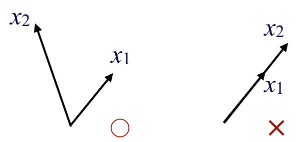
$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ は，2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は，1次独立。本当？

2つの関数が1次独立とは(再掲)

2つの関数が1次独立とは

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは, $C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の特殊解を, 2つ考える

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたすもの $\boldsymbol{\xi}_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたすもの $\boldsymbol{\xi}_2(t)$

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ は, 2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t)$ は, 1次独立である 👌

$\because$ $c_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + c_2\boldsymbol{\xi}_2(t) = \boldsymbol{0}$ が任意の t についてなりたつとする

$t = t_0$ のときも当然なりたつ

$c_1\boldsymbol{\xi}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{\xi}_2(t_0) = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は1次独立だから

$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ ← これがなりたつのは $c_1 = c_2 = 0$ に限る

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたす $\boldsymbol{\xi}_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたす $\boldsymbol{\xi}_2(t)$

一般解を $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $\boldsymbol{x}(t_0) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ の形で表せる

特殊解の1次結合 $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)$ を考えると

$t = t_0$ のとき $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$

- 一般解で表された $\boldsymbol{x}(t)$
- 特殊解の1次結合 $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)$

どちらも同じ初期値をもつ

一意だから, それらは同じ解である

$\boldsymbol{x}(t) = x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)$

定数係数の
斉次形2階線形微分方程式を解く💡

2階線形微分方程式を解く

$x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次形2階線形微分方程式

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ をみたす λ について $x = e^{\lambda t}$ は解

特性方程式という

特性方程式の解の形によって，3パターン

- 異なる2つの実数解の場合
- 異なる2つの虚数解の場合
- 重解の場合

実数解が2つの場合

特性方程式の異なる2つの実数解 λ_1, λ_2

微分方程式の1次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

一般解は $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

（つまり，最初のとおり）

虚数解が2つの場合

一般解は $x(t) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$

さらに計算すると

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\
&= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(C_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + C_2(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))\right) \\
&= e^{\alpha t}\left((C_1 + C_2)\cos(\beta t) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta t)\right)
\end{aligned}
$$

なぜ三角関数になるのかは，次のスライドで

定数を置き直して，一般解は

$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$ 振動を表している これは先で

(ところで)複素数の指数関数

実数の指数関数のテイラー展開 $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

複素数の指数関数は，テイラー展開で定義する

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

すると

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\
&= \underbrace{(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots)}_{\cos\theta\text{ のテイラー展開}} + i\underbrace{(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)}_{\sin\theta\text{ のテイラー展開}}
\end{aligned}
$$

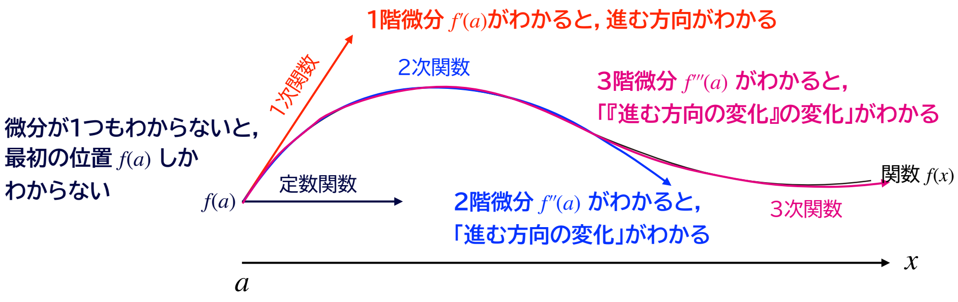
※本当は，級数をこんなふうに分けるのは
いつでもできるわけではありません💦

よって $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\theta = \pi$ のとき $e^{i\pi} + 1 = 0$ [オイラーの等式]

(ところで)テイラー展開について

テイラー展開 $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$



$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a), \ldots$ がすべてわかるなら，関数 $f(x)$ の「行く末」はすべてわかる

重解の場合

ふつうにやると，微分方程式の解は $C_1e^{\lambda_1 t}$ しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は $te^{\lambda_1 t}$

確かめるため，解を微分して，微分方程式に代入してみる

$$(te^{\lambda_1 t})' = \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t}$$
$$(te^{\lambda_1 t})'' = \lambda_1(\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t}$$
$$= \{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\}te^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a)e^{\lambda_1 t}$$

λ_1は特性方程式の解だから0

特性方程式の解と係数の関係により0

つまり，$te^{\lambda_1 t}$ も解

一般解は
$$C_1e^{\lambda_1 t} + C_2te^{\lambda_1 t}$$

見つけ方はテキストで(定数変化法)

例題🤔

例題

$x'' - 5x' + 6x = 0$ を解いて，

初期値 : $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$ での特殊解を求めよ。

特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$　その解は $\lambda = 2, 3$

異なる2つの実数解なので，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

初期条件から

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$
$$x'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 0$$
$$\downarrow$$
$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

よって，求める特殊解は

$$x(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

今日のまとめ

定数係数・斉次形の
2階線形微分方程式

$$x'' + ax' + bx = 0$$

次回は非斉次形
（右辺が0でない）をやります