

2024年度春学期

# 応用数学(解析)

第2部・基本的な微分方程式 /

第8回

2階線形微分方程式(2)



関西大学総合情報学部  
浅野 晃

## 2階線形微分方程式(復習) 🤔

2 | 27

## 2階線形微分方程式

一般には  $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$   
ここが恒等的に0なのが[斉次]  
そうではないのが[非斉次]

一番簡単なのは  $x'' + ax' + bx = 0$  定数係数の斉次方程式

とりあえず,  $x \equiv 0$  は解[自明解]

それ以外には?

## 2階線形微分方程式の解

とりあえず  $x'' + ax' + bx = 0$  に  $x(t) = e^{\lambda t}$  を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) e^{\lambda t} = 0$$

ここが0になるような  $\lambda$  については  
 $x = e^{\lambda t}$  は解, その定数倍も解

$\lambda$  の2次方程式だから, みます  $\lambda$  はたいてい2つ  $\lambda_1, \lambda_2$

一般解は  $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$   $x \equiv 0$  を含む

## 2階線形微分方程式を解く

$$x'' + ax' + bx = 0 \quad \text{定数係数の} \\ \text{斉次形2階線形微分方程式}$$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  をみたく  $\lambda$  について  $x = e^{\lambda t}$  は解  
特性方程式という

特性方程式の解の形によって, 3パターン

異なる2つの実数解の場合  
異なる2つの虚数解の場合  
重解の場合

## 実数解が2つの場合

特性方程式の  
異なる2つの実数解  $\lambda_1, \lambda_2$

微分方程式の  
1次独立な解  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

$$\text{一般解は } x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

(つまり, 最初のとおり)

## 虚数解が2つの場合

$$\text{一般解は } x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$$

さらに計算すると

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= e^{\alpha t} (C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}) \\ &= e^{\alpha t} (C_1 (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + C_2 (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))) \\ &= e^{\alpha t} ((C_1 + C_2) \cos(\beta t) + i(C_1 - C_2) \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

オイラーの式  
 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  による

定数を置き直して, 一般解は

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \quad \text{振動を表している (次の第3部で)}$$

## 重解の場合

ふつうにやると, 微分方程式の解は  $C_1 e^{\lambda_1 t}$  しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は  $t e^{\lambda_1 t}$

確かめるため, 解を微分して, 微分方程式に代入してみる

$$\begin{aligned} (t e^{\lambda_1 t})' &= \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t} \\ (t e^{\lambda_1 t})'' &= \lambda_1 (\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} &(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) e^{\lambda_1 t} + a \lambda_1 t e^{\lambda_1 t} + b t e^{\lambda_1 t} \\ &= \{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\} t e^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a) e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

$\lambda_1$  は特性方程式の解  
だから0

特性方程式の  
解と係数の関係により0

一般解は

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$$

見つけ方は前回のテキストで  
(定数変化法)

## 非斉次形 2階線形微分方程式 🤔

9 | 27

## 非斉次形2階線形微分方程式

前回のは  $x'' + ax' + bx = 0$  定数係数の斉次方程式

今回は  $x'' + ax' + bx = \underline{R(t)}$   
[非斉次]tの式

2023年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 10 | 27

## 非斉次形2階線形微分方程式

前回のは  $x'' + ax' + bx = 0$  定数係数の斉次方程式

今回は  $x'' + ax' + bx = \underline{R(t)}$  [非斉次]tの式

結論からいうと

非斉次形の一般解 =  
非斉次形の特殊解 なにかひとつ(何でもいい)  
+ 対応する **斉次形** の一般解

2023年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 11 | 27

## 一般的にいうと

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$  を,  $x_1 = x, x_2 = x'$  とおいて

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned} \quad \text{と表す}$$

行列で  $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

1階線形微分方程式の形になる  
何階線形微分方程式でも, この形にできる

2023年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 12 | 27

## 一般的にいうと

非斉次形  $n$  階線形微分方程式

$x' = A(t)x + b(t)$  の一般解  $x_s(t)$  は

非斉次形方程式

$x' = A(t)x + b(t)$  の任意の特殊解  $x_p(t)$  と

対応する斉次形方程式

$x' = A(t)x$  の一般解  $x_h(t)$  の 和で表される。

$$x_s(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

何階微分方程式でも  
定数係数でなくても

## 証明は、割と簡単

まず  $x_s(t) = x_h(t) + x_p(t)$  が

非斉次形方程式  $x' = A(t)x + b(t)$  の解であることを確かめる

右辺に  $x_s(t) = x_h(t) + x_p(t)$  を代入

$$\begin{aligned} & A(t)x_s(t) + b(t) \\ &= A(t)(x_h(t) + x_p(t)) + b(t) \\ \text{斉次形 } x' = A(t)x &= (A(t)x_h(t))' + (A(t)x_p(t) + b(t)) \quad \text{非斉次形 } x' = A(t)x + b(t) \\ &= (x_h(t))' + (x_p(t))' = (x_s(t))' \end{aligned}$$

(左辺)

本当に一般解か？  
どんな初期値に対する特殊解でも表せるか？

## 証明は、割と簡単

どんな初期値に対する特殊解でも表せるか？

非斉次形方程式  $x' = A(t)x + b(t)$  の一般解  $x_s(t)$  について  
任意の初期値  $x_s(t_0) = x_0$  を考える

このとき、対応する斉次形方程式  $x' = A(t)x$  の一般解  $x_h(t)$  について

初期値を  $x_h(t_0) = x_0 - x_p(t_0)$  にとれば

$$\begin{aligned} x_s(t_0) &= x_h(t_0) + x_p(t_0) \\ &= (x_0 - x_p(t_0)) + x_p(t_0) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

だから、これで  
非斉次形方程式の解で初期値を  $x_s(t_0) = x_0$   
としたことになっている

この斉次形方程式は一意だから、  
斉次形方程式でこの初期値の特殊解はひとつ 非斉次形方程式の特殊解もひとつ

例題 🤔

## 非斉次形2階線形微分方程式

前回のは  $x'' + ax' + bx = 0$  定数係数の斉次方程式

今回は  $x'' + ax' + bx = R(t)$  [非斉次]tの式

結論からいうと

非斉次形の一般解 = これを見つけるには、右辺の形に注目  
 非斉次形の特殊解なにかひとつ(何でもいい)  
 + 対応する斉次形の一般解

## 例題

$x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$  の一般解を求めよ。

特殊解を,  $x = at^2 + bt + c$  と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$-(3a+3)t^2 + (4a-3b-3)t + (2a+2b-3c+2) = 0$$

これが  $t$  に関係なくなりましたから

$$\begin{cases} 3a+3 = 0 \\ 4a-3b-3 = 0 \\ 2a+2b-3c+2 = 0 \end{cases} \quad \text{これを解くと } a = -1, b = -\frac{7}{3}, c = -\frac{14}{9}$$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は  $x = -t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$

## 例題

$x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$  の一般解を求めよ。

非斉次形の特殊解(のひとつ)は  $x = -t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$

対応する斉次形の方程式は  $x'' + 2x' - 3x = 0$

特性方程式は  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$  その解は  $\lambda = 1, -3$

異なる2つの実数解なので、斉次形方程式の一般解は  $x = C_1e^t + C_2e^{-3t}$

以上から、与えられた非斉次形方程式の一般解は

$$x = C_1e^t + C_2e^{-3t} - t^2 - \frac{7}{3}t - \frac{14}{9}$$

## 例題

$x'' + 2x' - 3x = e^{2t}$  の一般解を求めよ。

特殊解を,  $x = ae^{2t}$  と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$4ae^{2t} + 2 \cdot 2ae^{2t} - 3ae^{2t} = e^{2t} \quad \text{これが } t \text{ に関係なくなりましたから } a = \frac{1}{5}$$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は  $x = \frac{1}{5}e^{2t}$

対応する斉次形の方程式は  $x'' + 2x' - 3x = 0$  一般解は  $x = C_1e^t + C_2e^{-3t}$

以上から、非斉次形方程式の一般解は  $x = C_1e^t + C_2e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t}$

## 例題

$x'' + 2x' - 3x = 2 \cos t$  の一般解を求めよ。

特殊解を,  $x = A \cos t + B \sin t$  と見当をつける

これを元の方程式に代入して整理すると

$$(-4A + 2B - 2) \cos t + (-2A - 4B) \sin t = 0 \quad \text{cos, sinは独立(あとで説明)}$$

$$\begin{cases} -4A + 2B - 2 = 0 \\ -2A - 4B = 0 \end{cases} \quad A = -\frac{2}{5}, B = \frac{1}{5}$$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は  $x = -\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$

対応する斉次形の方程式は  $x'' + 2x' - 3x = 0$  一般解は  $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t}$

以上から, 非斉次形方程式の一般解は  $x = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} - \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$

## 関数の1次独立とWronskian 🤔

## 関数の1次独立とWronskian

関数  $x_1(t)$  と  $x_2(t)$  が1次独立とは,

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$  がどんな  $t$  についてもなりたつなら,  $C_1 = C_2 = 0$

ところで  $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$  を  $t$  で微分すると  $C_1 x_1'(t) + C_2 x_2'(t) = 0$

まとめて行列で書くと  $\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解が  $C_1 = C_2 = 0$  だけになるのは, この行列に逆行列が存在する時

$$\text{つまり } \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

Wronskianという

## 関数の1次独立とWronskian(例)

関数  $x_1(t)$  と  $x_2(t)$  が1次独立とは,

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$  がどんな  $t$  についてもなりたつなら,  $C_1 = C_2 = 0$

$\cos t$  と  $\sin t$  は?

$$\text{Wronskianは } \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \text{ で, Wronskianが0でないので,}$$

$\cos t$  と  $\sin t$  は1次独立

## 今日のまとめ

定数係数・非斉次形の  
2階線形微分方程式

$$x'' + ax' + bx = R(t)$$

非斉次形の一般解 =

非斉次形の特殊解なにかひとつ(何でもいい)

+ 対応する斉次形の一般解

$$x'' + ax' + bx = 0$$

これを見つけるには右辺の形に注目

## 演習問題について(一部)

## 演習問題(3)

$x'' + x = \cos 2t$  の一般解を求めよ。

このように「勘」をはたらかせる

特殊解を,  $x = A \cos 2t$  と見当をつける

$x' = -2A \sin 2t$ ,  $x'' = -4A \cos 2t$  なので,  $x', x''$  を元の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} -4A \cos 2t + A \cos 2t &= \cos 2t \\ (-4A + A - 1) \cos 2t &= 0 \end{aligned} \quad \text{これが } t \text{ に関係なくなりましたから, } A = -\frac{1}{3}$$

非斉次形の方程式の特殊解(のひとつ)は  $x = -\frac{1}{3} \cos 2t$

あとは, 対応する斉次形の方程式  $x'' + x = 0$  の一般解を求めてください。