2024 年度春学期　応用数学（解析）　第８回演習の解答例

1. 特殊解を求めるため，$x = at^2 + b^t + c$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} 2a + (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) &= t + 1 \\ -2at^2 + 2(a - b)t + (2a + b - 2c) &= 0 \end{aligned} \tag{A1}$$

   が得られます。これが t によらずなりたつので,

$$\begin{cases} -2a & = 0 \\ 2(a - b) & = 1 \\ 2a + b - 2c & = 1 \end{cases} \tag{A2}$$

   がなりたち，これを解くと $a = 0,\ b = -\dfrac{1}{2},\ c = -\dfrac{3}{4}$ となります。

   一方，対応する斉次形の方程式は $x'' + x' - 2x = 0$ で，特性方程式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ となり，その解は $\lambda = 1, -2$ です。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$（$C_1, C_2$ は任意の定数）となります。

   以上から，与方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - \dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4}$ となります。■

2. 特殊解を求めるため，$x = ae^t$ と見当をつけて与式に代入すると

$$ae^t + 2ae^t + ae^t = e^t \tag{A3}$$

   が得られます。これが t によらずなりたつので $a = \dfrac{1}{4}$ となります。

   一方，対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' + x = 0$ で，特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ となり，その解は $\lambda = -1$（重解）です。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}$（$C_1, C_2$ は任意の定数）となります。

   以上から，与方程式の一般解は $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + \dfrac{1}{4}e^t$ となります。■

3. 特殊解を求めるため，$x = A\cos 2t + B\sin 2t$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} (-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) + (A\cos 2t + B\sin 2t) &= \cos 2t \\ (-4A + A - 1)\cos 2t + (-4B + B)\sin 2t &= 0 \end{aligned} \tag{A4}$$

   が得られます。これが t によらずなりたつので $A = -\dfrac{1}{3},\ B = 0$ となります。

   一方，対応する斉次形の方程式は $x'' + x = 0$ で，特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$ となり，その解は $\lambda = \pm i$ です。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$（$C_1, C_2$ は任意の定数）となります。

   以上から，与方程式の一般解は $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t - \dfrac{1}{3}\cos 2t$ となります。■

   （注）この問題では，左辺に 1 階微分 x' の項がありません。cos の 2 階微分はやはり cos なので，はじめから $x = A\cos 2t$ と見当をつけて，もう少し簡単な式で解くこともできます。