

演習問題

過去の試験問題から選んだものです。参考文献からとった問題もあります。

実数の定義・数列の収束に関して

次の各問に答えよ。

1. 「可算無限」とは何かを説明せよ。
2. 数の「稠密性」と「連続性」の違いを説明せよ。
3. 実数の連続性の定義をひとつあげよ。
4. 数列 $a_n = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束することを、 $\varepsilon - N$ 論法で示せ。

微分方程式について

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を解け。ただし、初期値が指定されている場合はその初期値を満たす特殊解を、そうでない場合は一般解を求めよ。

1. $x' = \frac{2tx}{t^2 - x^2}$
2. $tx' - x = x^{\frac{2}{3}}$
3. $x'' + 2x' + x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$
4. $x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 2t - 3, x(0) = x'(0) = 0$
5. $x'' + x = \cos 2t, x(0) = x'(0) = 0$

参考文献

水田義弘, 詳解演習 微分積分, サイエンス社, 1998. ISBN4-7819-0891-8

解答例

実数の定義・数列の収束に関して

1. (講義第2回参照)
2. (講義第3回参照)
 - **数の稠密性** どの2つの数をとっても、その間に別の数が存在すること。
 - **数の連続性** (デデキントの切断を使っていうと) 数を「一方の組のどの数も、もう一方の組のどの数よりも小さくなるように2つの組に分け」たとき (この表現は、「境界」のことは言っていないことに注意)、以下のどちらかであること。(最大と最小のどちらもない、ということとは起こらない)
 - 小さい方の組に最大値があり、大きい方の組に最小値がない
 - 大きい方の組に最小値があり、小さい方の組に最大値がない
3. (講義第3回・第4回であげた4つの定義のうち、ひとつを答えてください。)
4. どんな ε に対しても、 $N = (\frac{1}{\varepsilon}$ 以上の最小の整数) とおくと、 $|a_N| \leq \varepsilon$ となる。よって、 $n > N$ のとき $|a_n - 0| < \varepsilon$ となり、 $\varepsilon - N$ 論法による収束の定義により $n \rightarrow \infty$ のとき $a_n \rightarrow 0$ となる。■

微分方程式について

1. 与式の右辺の分母分子を t^2 で割ると $x' = \frac{2(\frac{x}{t})}{1 - (\frac{x}{t})^2}$ となるので、同次形の微分方程式である。よって $\frac{x}{t} = u$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= t \frac{du}{dt} + u = \frac{2u}{1 - u^2} \\ t \frac{du}{dt} &= \frac{2u}{1 - u^2} - u = \frac{u(1 + u^2)}{1 - u^2} \\ \frac{1 - u^2}{u(1 + u^2)} du &= \frac{1}{t} dt \\ \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1 + u^2} \right) du &= \int \frac{1}{t} dt \\ \log |u| - \log |1 + u^2| &= \log |t| + C \quad (C \text{ は定数})\end{aligned}\tag{1}$$

となり、 $\frac{u}{1 + u^2} = \pm e^C t$ となる。よって、 $\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと、 $\frac{u}{1 + u^2} = At$ が得られる。ここで $u = \frac{x}{t}$ を代入すると、 $\frac{x}{t} = At \left(1 + \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right)$ より一般解は $x = A(t^2 + x^2)$ となる。

2. 与式は Bernoulli の微分方程式で、その一般形 $x' + P(t)x = Q(t)x^n$ にあてはめると $P(t) = -\frac{1}{t}$ 、 $Q(t) = \frac{1}{t}$ 、 $n = \frac{2}{3}$ である。したがって、 $u = x^{1 - \frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$ とおくと、 $u' + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{t} \right) u = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t}$ すなわち $u' + \frac{-1}{3t} u = \frac{1}{3t}$ と変形できる。この方程式は1階線形微分方程式で、 $p(t) = \exp \left(\int \frac{-1}{3t} dt \right)$

とおくと $p(t) = \exp\left(-\frac{1}{3}\log t\right) = t^{-\frac{1}{3}}$ であり, また $(p(t)u)' = p(t)\left(\frac{1}{3t}\right)$ がなりたつことから

$$\begin{aligned}(t^{-\frac{1}{3}}u)' &= t^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{3t} \\ t^{-\frac{1}{3}}u &= \frac{1}{3}\int t^{-\frac{4}{3}}dt \\ t^{-\frac{1}{3}}u &= -t^{-\frac{1}{3}} + C \quad (C \text{ は定数})\end{aligned}\tag{2}$$

よって $u = -1 + Ct^{\frac{1}{3}}$ である。 $u = x^{\frac{1}{3}}$ だったので, 一般解は $x = \left(-1 + Ct^{\frac{1}{3}}\right)^3$ となる。 ■

3. この方程式は斉次形2階線形微分方程式で, 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ と表せる。この特性方程式は $(\lambda + 1)^2 = 0$ と変形できて, 重解 $\lambda = -1$ をもつ。よって, 微分方程式の一般解は, C_1, C_2 を定数として $x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$ である。

初期値 $x(0) = 0$ であるから, 一般解に $t = 0$ を代入して $x = 0$ とおくと, $C_1 = 0$ が得られる。また, $x' = -C_1e^{-t} + C_2(e^{-t} - te^{-t})$ であり, 初期値 $x'(0) = 1$ であるから, x' の式に $t = 0, C_1 = 0$ を代入して $x = 1$ とおくと, $x'(0) = C_2(1 - 0) = 1$ より $C_2 = 1$ が得られる。よって, 求める特殊解は $x = te^{-t}$ である。

4. まず与えられた方程式の特殊解を求めるため, $x = at^2 + bt + c$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned}2a + 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) &= 3t^2 + 2t - 3 \\ -3at^2 + (4a - 3b)t + (2a + 2b - 3c) &= 3t^2 + 2t - 3\end{aligned}\tag{3}$$

が得られる。これが t によらずなりたつので,

$$\begin{cases} -3a & = 3 \\ 4a - 3b & = 2 \\ 2a + 2b - 3c & = -3 \end{cases}\tag{4}$$

がなりたち, これを解くと $a = -1, b = -2, c = -1$ となる。

一方, 対応する斉次形の方程式は $x'' + 2x' - 3x = 0$ で, 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ であり, その解は $\lambda = 1, -3$ である。よって, 斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$ (C_1, C_2 は任意の定数) となる。

以上から, 与方程式の一般解は $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t} - t^2 - 2t - 1$ となる。

問題での初期値は, $t = 0$ のとき $x(0) = x'(0) = 0$ となっているので, 一般解に代入すると $x(0) = C_1 + C_2 - 1 = 0, x'(0) = C_1 - 3C_2 - 2 = 0$ となる。これらから $C_1 = \frac{5}{4}, C_2 = -\frac{1}{4}$ となるので, 求める特殊解は $x(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-3t} - t^2 - 2t - 1$ である。 ■

5. 特殊解を求めるため, $x = A \cos 2t + B \sin 2t$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned}(-4A \cos 2t - 4B \sin 2t) + (A \cos 2t + B \sin 2t) &= \cos 2t \\ (-4A + A - 1) \cos 2t + (-4B + B) \sin 2t &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

が得られる。これが t によらずなりたつので, $A = -\frac{1}{3}, B = 0$ となる。

一方、対応する斉次形の方程式は $x'' + x = 0$ で、特性方程式は $\lambda^2 + 1 = 0$ となり、その解は $\lambda = \pm i$ である。よって、斉次形の方程式の一般解は $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ (C_1, C_2 は任意の定数) となる。

以上から、与方程式の一般解は $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{3} \cos 2t$ となる。問題での初期値は、 $t = 0$ のとき $x(0) = x'(0) = 0$ となっているので、一般解に代入すると $x(0) = C_1 - \frac{1}{3} = 0$, $x'(0) = C_2 = 0$ となる。これらから $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = 0$ となるので、求める特殊解は $x(t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t$ である。

■