

2024年度春学期

応用数学(解析)

第3部・微分方程式に関する話題 /

第10回

生存時間分布と半減期



関西大学総合情報学部
浅野 晃

今日は、「寿命」を扱う微分方程式🤔

寿命は「確率変数」

人間の寿命は、各個人によってばらばら

機械の寿命も、同じ型でも個体によってばらばら

その理由は「偶然」

寿命は[確率変数]であるという

寿命がいくらである確率がどのくらいであるかを表すのが[確率分布]

寿命の確率分布を考える

寿命を表す確率変数 T (時刻0に誕生した人が死亡する時刻)

$$l(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t + \Delta | T > t)$$

次の瞬間 単位時間あたり 時刻 t までは確かに生存している人が時刻 t 以後、時間 Δ の間に死亡する確率

$l(t)$ は
時刻 t まで生存している人が 次の瞬間に死ぬ危険の度合 [ハザード関数]

累積分布関数と「生存関数」

確率変数 T に対して $F(t) = P(T \leq t)$ **【累積分布関数】**

この場合、寿命が t 以下である確率

$$S(t) = 1 - F(t) = P(T > t) \quad \text{【生存関数】}$$

時刻 t の時点でまだ生きている確率

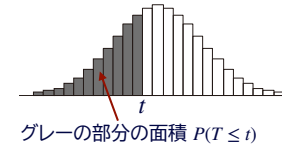
ハザード関数は「瞬間瞬間の死亡の危険」

生存関数は、ある時間がたったとき、まだ生きている確率

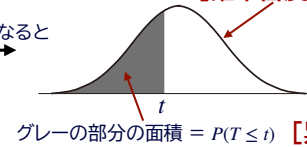
(ところで)累積分布関数と確率密度関数

ヒストグラム 柱の面積が確率を表す

ヒストグラム(だったもの)の「へり」
【確率密度関数】 $f(t)$

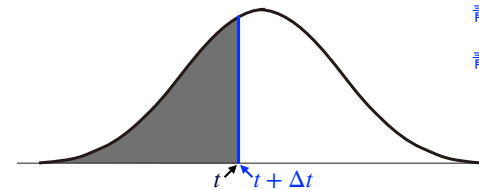


連続型になると



グレーの部分の面積 $P(T \leq t)$

グレーの部分の面積 = $P(T \leq t)$ **【累積分布関数】 $F(t)$**



青い部分 | の面積 = $P(t \leq T \leq t + \Delta t) = F(t + \Delta t) - F(t)$
青い部分 | の高さ = $\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$

その $\Delta t \rightarrow 0$ の極限 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = F'(t)$

すなわち $f(t) = F'(t)$

生存関数とハザード関数

寿命 T ハザード関数 $l(t)$ 累積分布関数 $F(t)$

$$\begin{aligned} l(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(t < T < t + \Delta | T > t) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P\{(t < T < t + \Delta) \text{ and } (T > t)\}}{P(T > t)} \quad \text{【条件付確率の定義】} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(t < T < t + \Delta)}{P(T > t)} \quad \text{【累積分布関数の定義】} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \end{aligned}$$

生存関数とハザード関数

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{1}{P(T > t)} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta) - F(t)}{\Delta} \\ &= \frac{1}{P(T > t)} F'(t) \quad \text{【微分の定義】} \\ f(t) &= F'(t) \quad \text{【確率密度関数】} \\ l(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \quad \text{【生存関数の定義】} \\ S(t) &= P(T > t) \\ S'(t) &= (1 - F(t))' = -F'(t) = -f(t) \end{aligned}$$

以上から $l(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)}$ という微分方程式が得られる

微分方程式を解く

$$\begin{aligned}l(t) &= -\frac{S'(t)}{S(t)} \\ &= -\frac{d}{dt}(\log S(t)) \\ -\int_0^t l(u)du &= \log \frac{S(t)}{S(0)} + C \quad C=0\end{aligned}$$

時刻0, つまり誕生の瞬間に生存している確率は1
つまり $S(0) = 1$

$t=0$ のとき $S(0) = 1$ だから

よって $S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$ という解が得られる

ハザード関数と生存関数の関係

ワイブル分布と指数分布

ワイブル分布

ハザード関数を $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ と仮定する

$S(t) = \exp\left(-\int_0^t l(u)du\right)$ に代入

$$\begin{aligned}S(t) &= \exp\left(-\int_0^t \lambda p(\lambda u)^{p-1} du\right) \quad \text{微積分の関係} \\ &= \exp\left(-\left[(\lambda u)^p\right]_{u=0}^{u=t}\right) = \exp(-(\lambda t)^p)\end{aligned}$$

$$F(t) = 1 - S(t) = 1 - \exp(-(\lambda t)^p)$$

この形の累積分布関数をもつ確率分布を【ワイブル分布】とよぶ

ワイブル分布のパラメータ

$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ パラメータは λ と p

λ が大きいと、ハザード関数が全体に大きくなる **死亡・故障する危険がどの時刻でも大きくなる**

$p > 1$ のときは、 $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が正
時間が経つにつれて、死亡・故障する危険が大きくなる 【**摩耗故障**】

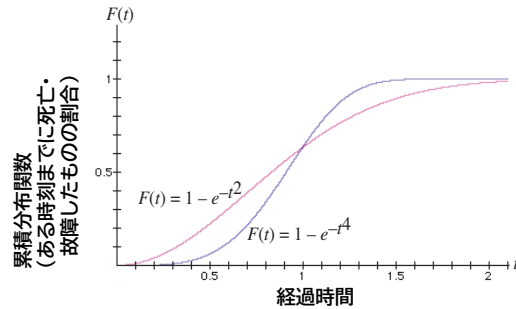
$0 < p < 1$ のときは、 $l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1}$ の指数が負
時間が経つにつれて、死亡・故障する危険が小さくなる 【**初期故障**】

ワイブル分布のパラメータ

$p=2$ の場合と $p=4$ の場合

どちらも摩耗故障(時間につれて故障しやすくなる)

$p=4$ のほうが、急激に故障が増える



ワイブルプロット

実務では、たくさんの個体で耐久試験を行い、ワイブル分布を仮定して、パラメータを推測する

$$S(t) = \exp(-(\lambda t)^p) \text{ より } \frac{1}{S(t)} = \exp((\lambda t)^p)$$

↓ 両辺の対数を2回とる

$$\log \left\{ \log \left(\frac{1}{S(t)} \right) \right\} = \log \{ \log (\exp((\lambda t)^p)) \}$$

$$= \log \{ (\lambda t)^p \}$$

$$= p(\log t + \log \lambda)$$

$$Y = p(X + \log \lambda) \quad \leftarrow X$$

時刻を上の X , その時刻での生存割合を上の Y に変換してプロット
→ 並びを近似する直線の傾きが p

指数分布

$$l(t) = \lambda p(\lambda t)^{p-1} \text{ で } p=1 \text{ の場合}$$

ハザード関数は $l(t) = \lambda$ 死亡・故障する危険が時刻によらず一定
[偶発故障]

累積分布関数は $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ [指数分布]

生存関数は $S(t) = e^{-\lambda t}$

放射性原子核は、どの時刻においても、その時点で存在する核のうち一定の割合が崩壊する

ハザード関数が一定で、指数分布にしたがう

半減期

ある時刻に存在する原子核の数が、その半分になるまでの時間は、どの時刻でも一定

時刻 t に存在する原子核の数が半分になる時刻を t' とする

$$S(t') = \frac{1}{2} S(t)$$

$$\downarrow \leftarrow \text{指数分布の生存関数 } S(t) = e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t'} = \frac{1}{2} e^{-\lambda t}$$

対数をとる

$$-\lambda t' = -\log 2 - \lambda t$$

原子核の数が半分になるまでの時間 $\underline{t' - t} = \frac{\log 2}{\lambda}$ t によらず一定 [半減期]

演習問題

ある原子核の半減期が2年であるとする
1年以内に崩壊する原子核の割合は？

時間 t の単位を「年」とする

指数分布の生存関数を $S(t) = e^{-\lambda t}$ とおくと

$$\text{半減期} = \frac{\log 2}{\lambda} \quad \text{半減期は2年なので } \lambda = \frac{\log 2}{2}$$

求めるのは、指数分布の累積分布関数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ において $F(1)$ の値

演習問題

ある原子核の半減期が2年であるとする
1年以内に崩壊する原子核の割合は？

求めるのは、指数分布の累積分布関数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ において $F(1)$ の値

$$\text{半減期は2年なので } \lambda = \frac{\log 2}{2}$$

$$F(1) = 1 - e^{-\frac{\log 2}{2} \cdot 1} = 1 - e^{\log(2^{-\frac{1}{2}})} = 1 - 2^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0.293$$

1個の原子が1年以内に崩壊する確率 0.293

原子がたくさんあれば、そのうち崩壊する原子の割合が 29.3%

今日のまとめ

集団中の個体の数が
死亡・故障によって減少して行く

この現象を表す
微分方程式

解に仮定を持ち込むことで、
ワイブル分布, 指数分布といった
「死亡・故障による現象のモデル」が導かれる