

2024年度春学期

# 応用数学(解析)

第3部・微分方程式に関する話題 /

第11回

振動と微分方程式



関西大学総合情報学部  
浅野 晃

今日は、「振動」を扱う微分方程式💡

## 振動とは

ある方向に進めば進むほど、  
逆向きに進もうとする力が働く

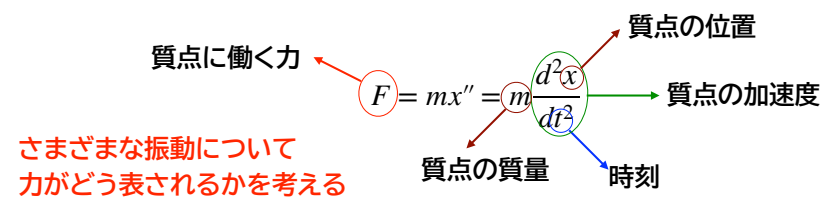
ときにおきる運動

釣り合い位置から両方に往復を繰り返す

## 質点の運動方程式

質点 = 質量はあるが大きさはない点  
大きさが無いので、物体自身の回転などは考えなくてよい

ニュートンの運動方程式



## 単振動

## 単振動

もっとも単純な振動, 復元力(下記)のみが働く

### 釣り合い位置にもどろうとする力[復元力]

原点を釣り合い位置とし, そこからの距離に比例する復元力が働くとする

$$F = -kx$$

正の定数      位置

釣り合い位置からの方向の逆向きの力なのでマイナス

## 単振動の運動方程式

$$F = mx'' \text{ より } mx'' = -kx$$

$F = -kx$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  とおくと

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

斉次形の2階線形微分方程式

特性方程式は  $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$       虚数解  $\lambda = \pm i\omega_0$

一般解は  $x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$

## 単振動の運動方程式

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \text{ より } x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

位置  $x$  は実数だから,  $C_1, C_2$  とも実数でなければならない

三角関数を合成すると

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,       $\phi = -\tan^{-1}(C_2/C_1)$

$x$  軸上で  $[-A, A]$  の範囲を往復する振動      単振動の式

## 単振動の式

$x$  軸上で  $[-A, A]$  の範囲を往復する振動

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

[振幅]

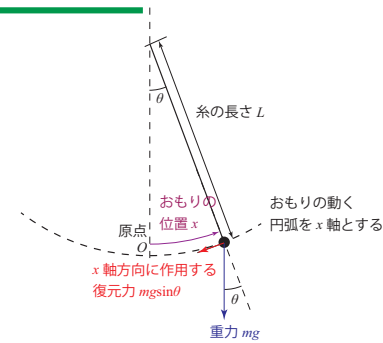
[角振動数(角周波数)]

時間が1秒進むと,  $(\omega_0 t + \phi)$  が何ラジアン進むか

1往復とは,  $2\pi$  ラジアン進むこと      それに必要な時間は  $2\pi/\omega_0$  [周期]

1秒間に何往復するか?      その回数は, 周期の逆数  $\omega_0/2\pi$   
[振動数(周波数)]

## 単振り子は単振動か?



復元力は  $-mg \sin \theta$

$\theta$  が小さいとき  $\sin \theta$  は  $\theta$  で近似できる

$\theta = x/L$  (ラジアン)なので,

復元力は  $-(mg/L)x$

これを  $k$  とみれば  
単振動

$$\text{周期 } \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad L \text{ と } g \text{ だけで決まる (振り子の等時性)}$$

$\theta$  が小さい, つまり振れ幅が小さいときのみ成り立つ

## 減衰振動

## 減衰振動

復元力以外に, [抵抗力]がはたらく場合

運動が速いほど, それを妨げる力が働く 空気抵抗など

質点の速度は  $x'$       抵抗力は  $-ax'$   
逆向きでマイナス      正の定数

運動方程式は

$$mx'' = -kx - ax' \quad \mu = \frac{a}{2m} \text{ とおく [抵抗係数]} \quad x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

## 減衰振動の運動方程式

$$x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{これも斉次形の2階線形微分方程式}$$

$$\text{特性方程式は } \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \text{解 } \lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

$\mu^2 < \omega_0^2$  の場合を考える 抵抗力が比較的小さい場合

$$\lambda = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \quad \text{は虚数解}$$

$< 0$

$$\text{微分方程式の解 } x = e^{-\mu t} (C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t))$$

$$\text{三角関数を合成 } x = Ae^{-\mu t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + \phi)$$

振幅が時間とともに小さくなる [減衰振動]

## 強制振動と共鳴 🤔

## 強制振動

復元力に加えて、外部から[強制力]がはたらく場合

質点を、角振動数  $\omega$  で強制的に振動させる

$$\begin{array}{ll} \text{復元力は } -kx & \text{運動方程式は} \\ \text{強制力は } F \cos \omega t & mx'' = -kx + F \cos \omega t \end{array}$$

$$f = \frac{F}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad \text{これは非斉次形の2階線形微分方程式}$$

## 強制振動の運動方程式

$$x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$$

対応する斉次形の微分方程式は  $x'' + \omega_0^2 x = 0$  単振動の式と同じ

$$\text{一般解は } x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

特殊解をひとつ見つける

$$x = C \cos \omega t \quad \text{を入れてみると } C(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t = f \cos \omega t$$

$$\text{よって, } \omega \neq \omega_0 \text{ のとき } C = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{非斉次形の一般解は } x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

## 強制振動

[強制振動]の式  $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$

強制力のないときの振動  
[固有振動] 強制振動

$\omega_0$  [固有角振動数]  
 $\omega_0/2\pi$  [固有振動数]

強制振動の角振動数  $\omega$  が固有角振動数  $\omega_0$  に近づくと  
強制振動の項が大きくなる

$\omega = \omega_0$  のときは発散する ✨

## 共鳴

$\omega = \omega_0$  のときは強制振動の項が発散する

もう一度もとの方程式に戻る  $x'' + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$

$x = t(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t)$  と見当をつけて、  
また右辺も  $\omega = \omega_0$  としてそれぞれ代入すると

$$-2C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + 2C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = f \cos \omega_0 t$$

よって  $C_1 = 0, C_2 = \frac{f}{2\omega_0}$

解は  $x = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{ft}{2\omega_0} \sin \omega_0 t$

時間がたつと振動しながら発散する [共鳴]

## 問題

## 問題

単振動において、

$t = 0$  のとき  $x = 0, x' = v$  となるとき、運動方程式の特殊解を求めよ。

単振動の運動方程式の一般解は  $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

両辺を  $t$  で微分すると  $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

$t = 0$  のとき  $x = 0, x' = v$  となるので

$x(0) = A \cos \phi = 0 \longrightarrow A = 0$  だと  $x \equiv 0$

$x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$  振動にならない よって  $\cos \phi = 0$

## 問題

一般解  $x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$   $x' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$

問題に示された初期値によると

$$x(0) = A \cos \phi = 0 \quad x'(0) = -A\omega_0 \sin \phi = v$$

$\cos \phi = 0$  より  $\phi = \frac{\pi}{2}$  にできる このとき  $\sin \phi = 1$

つまり  $-A\omega_0 = v$   $A = -\frac{v}{\omega_0}$

以上から、求める特殊解は

$$x = -\frac{v}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{v}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

## 今日のまとめ

振動を表す微分方程式

単振動

減衰振動

強制振動

2階線形微分方程式で表され、  
それを解くと振動を表す式が得られる