第４部・「その先の解析学」への導入　複素関数論ダイジェスト (2) 孤立特異点と留数

前回の講義で,

> 領域 D で正則な関数 $f(z)$ について，経路 C が D の内部の閉曲線ならば，$\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$ である。

という「コーシーの積分定理」を説明しました。では，正則でない点，いわば「穴」がある場合はどうなるのでしょうか？ 今回は，閉曲線 C の内側に，関数 $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ における $z=1$ のように，正則でない点がある場合はどうなるか，を考えます。

$f(z) = z^n$ の積分

今日の問題のような積分を考えるために，関数を級数で表して，各項に対する積分を考えます。その準備として，$f(z) = z^n$ を，単位円周（複素平面における，原点を中心とする半径 1 の円周）にそって正の向きにまわって積分した時の値を考えます。

C を単位円周とします。まず，$n = 0, 1, 2, \ldots$ の場合は，円周内で z^n は正則ですから，コーシーの積分定理により $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$ です。

一方，$n = -1, -2, \ldots$ のとき，あらためて $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とおきます。このとき，$z = 0$ で $f(z)$ は正則ではありません。この場合は，単位円周 C を正の向きにまわる z が $z = e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表されるので,

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\frac{dz}{d\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} ie^{i\theta} d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta\end{aligned} \tag{1}$$

となります。この積分は，$n = 1$ のとき

$$\oint_C \frac{1}{z}dz = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \tag{2}$$

となり，$n = 2, 3, \ldots$ のときは

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{z^n}dz &= \frac{i}{i(1-n)}\left[e^{i(1-n)\theta}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{1-n}\left[e^{2(1-n)\pi i} - 1\right]\end{aligned} \tag{3}$$

で，$e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i\sin(2(1-n)\pi) = 1$ ですから上の積分は 0 です。

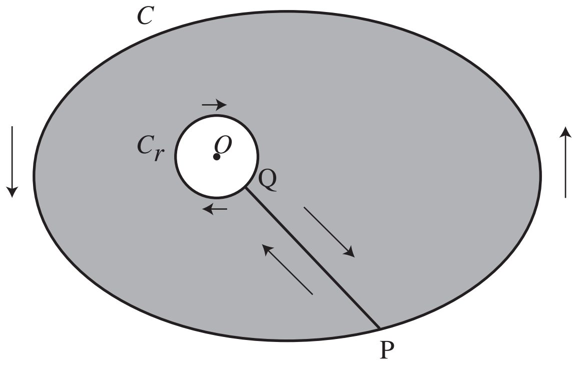

図 1: コーシーの積分公式

同様に，a を中心とする半径 1 の円周を C とするとき，

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n=2,3,\dots \end{cases} \tag{4}$$

となります。

コーシーの積分公式

コーシーの積分公式は，領域 D で正則な関数 f の点 z における値 $f(z)$ が，D 内で点 z を囲み正の方向に 1 周する閉曲線 C に沿った積分を使って

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{5}$$

と表されるというものです。とくに $z=0$ のとき，C を原点を囲み正の方向に一周する閉曲線として

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta \tag{6}$$

となります。この公式は，正則関数 f の点 z での値は，z を囲む閉曲線上の値だけで決まってしまうことを示しています。正則関数を「軟らかい板を，ぐにゃぐにゃとどこにも折り目がなく曲げたようなもの」と考えれば，ある点での関数の値が周囲での値によって決まってしまう，というのは，それほど不思議ではありません。

(6) 式の意味を考えるため，図 1 のような，原点を囲む閉曲線 C とその内側で原点を囲む半径 r の円 C_r，それに両者を結ぶ線分 PQ を考えます。関数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta}$ は原点で正則ではありませんが，P から C を正の向きに 1 周→ $PQ \to C_r$ を逆向きに 1 周→ QP という経路を考えると，この経路は閉曲線で，その内部で関数 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta}$ は正則です。よって，コーシーの積分定理により

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = 0 \tag{7}$$

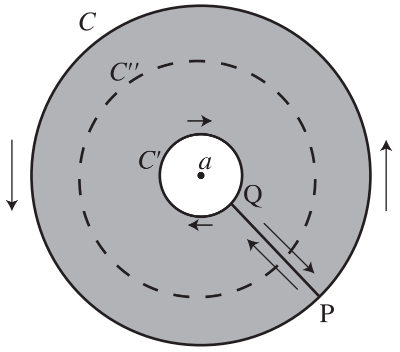

図 2: 孤立特異点とローラン級数展開

で，$P \to Q$ の積分と $Q \to P$ の積分は打ち消し合い，$-C_r$（C_r の負の方向）に沿った積分は $(-1) \times C_r$ の正の方向に沿った積分 となるので，

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \tag{8}$$

となります。$r \to 0$ のとき，上式の右辺は $\displaystyle\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta$ に収束し[1]，前節で説明した $\dfrac{1}{z}$ の積分を使うと

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta} d\zeta = f(0) \oint_{C_r} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i f(0) \tag{9}$$

となりますから，(6) 式が得られました。これをさらに z だけ（積分経路も含めて）平行移動すると，(5) 式が得られます[2]。

孤立特異点とローラン級数展開

領域 D において，関数 $f(z)$ が 1 点 a を除いて正則であるとき，a を $f(z)$ の**孤立特異点**といいます。つまり，今日の最初に述べた「穴」です。

このとき，a を中心とする円周 C と，その内部でやはり a を中心とする円周 C' を考え，図 2 のように，P から C を正の向きに 1 周→ $PQ \to C'$ を逆向きに 1 周→ QP という閉じた経路を考えます。すると，経路の内部で $f(z)$ は正則ですから，$f(z)$ をコーシーの積分公式を用いて表すことができます。図 1 と同様の関係を考慮すると

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{10}$$

となります。

ここで，(10) 式の第 1 項の積分の過程では，ζ が外側の経路 C を動き，z は C の内部にあるので

[1] なぜ収束するのかは，参考文献を参照してください。
[2] 詳細は，参考文献を参照してください。

$|z-a|<|\zeta-a|$ です。そこで，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}} \tag{11}$$

と変形すると，右辺の 2 つめの分数は初項 1，公比 $\dfrac{z-a}{\zeta-a}$ の等比級数の和で表され，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a}\left\{1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2+\cdots\right\} \tag{12}$$

となります。同様に，(10) 式の第 2 項の積分の過程では，ζ が内側の経路 C' を動き，z は C' の外部にあるので $|\zeta-a|<|z-a|$ で，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{\zeta-a}\left\{1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^2+\cdots\right\} \tag{13}$$

と表されます。

(12) 式，(13) 式を (10) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}f(z)=\cdots+&\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\\&a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}+a_n(z-a)^n+\cdots\end{aligned} \tag{14}$$

ただし

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n=0,1,2,\dots) \tag{15}$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n=1,2,\dots) \tag{16}$$

となります[3]。

ここで，図 2 の円環領域で $f(z)$ は正則なので，コーシーの積分定理により

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta=0 \quad (n=1,2,\dots) \tag{17}$$

であり，これを使うと，(15) 式と (16) 式を合わせて

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1}d\zeta \quad (n=0,\pm1,\pm2,\dots) \tag{18}$$

と，円周 C だけを使って表すことができます。

関数 $f(z)$ をこのような級数で表すことを，$f(z)$ の孤立特異点 a のまわりの**ローラン (Laurent) 級数展開**といいます。

[3] 付録も参照してください。ここで「級数の積分」を「積分の級数」に置き換えられるのは当然ではなく，本当は，ここがこの証明で難しいところです。ここでは詳細は略します。

n 位の極

関数 $f(z)$ と孤立特異点 a について，ローラン級数の負のべきの項が有限，すなわち級数が a_{-n} $(n \geqq 1)$ から始まるとき，a を **n 位の極**といいます。なお，負のべきの項が無限に現れるときは，a は**真性特異点**とよばれます。

a が n 位の極であるとき，

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots \tag{19}$$

ですから，両辺を $(z-a)^n$ 倍すると

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \tag{20}$$

となるので，

$$\lim_{z \to a}(z-a)^n f(z) = a_{-n} \tag{21}$$

となります。

留数

図 2 において，$f(z)$ を円環部分の中にある円周 C'' に沿って正の向きに 1 周して積分することを考えます。$f(z)$ をローラン級数展開したものの各項を積分すると考えると，今回の最初に説明した「z^n の積分」により，$\dfrac{1}{z-a}$ の項以外はすべて 0 となり，

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C''} f(z)dz \tag{22}$$

となります[4]。この a_{-1} を，$f(z)$ の孤立特異点 a における**留数 (residue)** といい，$\mathrm{Res}(a; f)$ で表します。

ここで，孤立特異点 a が n 位の極であるとき

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots \tag{23}$$

と表されますから，

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots \tag{24}$$

という，べき級数が得られます。したがって，両辺を $(n-1)$ 回微分すると，

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)!a_{-1} + \frac{n!}{1!}a_0(z-a) + \frac{(n+1)!}{2!}a_1(z-a)^2 + \cdots \tag{25}$$

となり，

$$\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z \to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) \tag{26}$$

が得られます。これらのことは，

[4] こう言えるのは，ローラン級数が「一様収束」しているからです。詳細は略します。

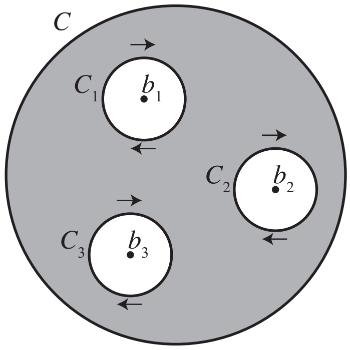

図 3: 有限個の孤立特異点を含む場合

- 孤立特異点つまり「穴」を囲んだ閉曲線上の積分は，留数で表される。
- 留数は，上の (26) 式が計算できれば求められる

ことを表しています。

とくに，$n = 1$，すなわち a が 1 位の極の場合は，

$$\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \to a}(z - a)f(z) \tag{27}$$

となります。これは，(21) 式で $n = 1$ とした場合に相当しています。

孤立特異点が複数ある場合

また，閉曲線 C の内部で，関数 $f(z)$ が有限個の孤立特異点 $b_1, b_2, \ldots$ を除いて正則であるとします。このとき，$b_1, b_2, \ldots$ のそれぞれを囲み C の内部にある円周を正の向きに一周する経路を $C_1, C_2, \ldots$ とすると，これまでと同様の考えで，コーシーの積分定理により

$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \cdots = 0 \tag{28}$$

ですから，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \mathrm{Res}(b_1; f) + \mathrm{Res}(b_2; f) + \cdots \tag{29}$$

がなりたちます。このことは，

> いくつかの「穴」を囲んだ閉曲線上の積分も，それぞれの「穴」での留数がわかれば求められる

ことを示しています。

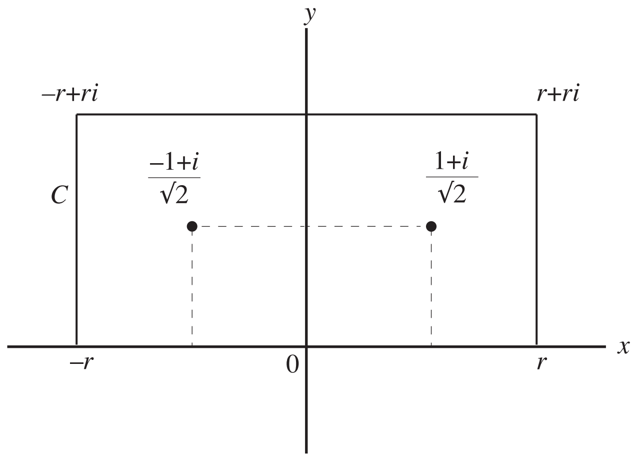

図 4: 留数と定積分

問題例

留数の考えを使って，図 4 に示す，幅 $2r$・高さ r の長方形の経路 C に沿った $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ の積分を考えます。

$$\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}})} \tag{30}$$

ですから，4 つある $f(z)$ の孤立特異点 $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}},\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}},\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ は，すべて 1 位の極です。

図 4 の経路 C の内部に入っている極は，$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ だけです。ここで，(27) 式より

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(\frac{1+i}{\sqrt{2}};f)&=\lim_{z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}}(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})f(z)\\&=\frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}\\&=\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{31}$$

となり，同様に $\mathrm{Res}(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}};f)=\dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$ となります。

よって，(29) 式より，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=\mathrm{Res}(\frac{1+i}{\sqrt{2}};f)+\mathrm{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}};f)=-\frac{i}{2\sqrt{2}} \tag{32}$$

で，すなわち $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z^4+1}dz=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ が得られます。

さて，この考えを使って，実関数の積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ を求めることを考えます。これが，複素関数論の説明の初めに言っていた，「本当にやりたかったこと」でした。

そのために，経路 C を各辺に分けて，それぞれの辺での $\dfrac{1}{z^4+1}$ の積分が，実軸上以外では $r\to\infty$ のとき 0 になることを示します。これには，実軸以外の辺上では $|z| \geqq r$ であることを用います。

例えば，長方形の右側の立辺では

$$\begin{aligned} \left|\int_r^{r+ri} \frac{1}{z^4+1}dz\right| &\leqq \int_r^{r+ri} \frac{1}{|z|^4+1}d|z| \\ &\leqq \int_0^r \frac{1}{r^4+1}dy = \frac{r}{r^4+1} \end{aligned} \tag{33}$$

で，$r\to\infty$ のとき 0 になります。他の辺でも同様で，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ が得られます。

問題

次の積分（C は原点を中心とする半径 2 の円周）を求めてください。

$$\frac{-1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin z}{\cos z}dz \tag{A1}$$

（この問題は，歌手の矢野顕子氏のアルバム「ふたりぼっちで行こう」の CD ジャケットに出ているもので，答えは「ふたり」の 2 です。）

注　z を複素数とするとき，三角関数 $\sin z, \cos z$ はそれぞれ

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz}+e^{iz}}{2} \tag{A2}$$

と定義されます。前回の演習問題で，θ を実数とするとき

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{i\theta}}{2} \tag{A3}$$

という関係があることを示しました。(A2) 式による複素三角関数の定義は，(A3) 式の実数 θ を複素数 z に置き換えたものです。

付録：正則関数が無限回微分可能であることの「直観的な」説明と，正則関数のテイラー展開

関数 $f(z)$ が領域 D 内で正則であるとき，$f(z)$ が無限回微分可能であることを，「直観的」に説明します。

コーシーの積分公式より，領域 D 内の閉曲線 C について

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{A1}$$

となります。このとき，C 内の点 a について

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(a)}{\zeta - a}d\zeta \tag{A2}$$

で，あらためて ζ を z と書き直すと

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(a)}{z-a}dz \tag{A3}$$

です。そこで，$f'(a)$ を考えると

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{da}\oint_C\frac{f(a)}{z-a}dz \tag{A4}$$

となりますが，ここで積分と微分の順番を逆にしていいなら，

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{d}{da}\frac{f(a)}{z-a}dz \tag{A5}$$

で，

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}\frac{f(a)}{z-a}&=f(a)\frac{d}{da}(z-a)^{-1}\\&=f(a)(-(z-a)^{-2})\cdot(-1)\\&=\frac{f(a)}{(z-a)^2}\end{aligned} \tag{A6}$$

ですから

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(a)}{(z-a)^2}dz \tag{A7}$$

となります。もう 1 回微分すると

$$f''(a)=\frac{2\cdot 1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(a)}{(z-a)^3}dz \tag{A8}$$

で，これを繰り返すと

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(a)}{(z-a)^{n+1}}dz \tag{A9}$$

となり，無限回微分可能であることがわかります。

ただ，この途中で行った「積分と微分を交換する」ことは当然にできることではなく，ここにある積分が「絶対可積分」であることから導かれます。そのため，ここの説明は「直観的」としています。また，(A9) 式はグルサの定理とよばれています。

なお，本文 (14) 式のローラン級数で，次数が正である部分は，その係数が本文 (15) 式で，(A9) 式とは各項が $n!$ 倍の違いになっています。この部分は，関数 $f(z)$ が正則である領域 D 内の閉曲線 C に関するもので，これが $f(z)$ が正則であるときの a のまわりのテイラー展開，すなわち

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots \tag{A10}$$

に相当します。

参考文献

志賀浩二，複素数３０講，朝倉書店，1989. ISBN978-4-254-11481-2
神保道夫，複素関数入門，岩波書店，2003. ISBN978-4-000-06874-1
中島匠一，複素関数入門ー留数計算への道すじ，共立出版，2022, ISBN978-4-320-11476-0