2024年度春学期

応用数学（解析）

第4部・「その先の解析学」への導入 ／

第13回
複素関数論ダイジェスト（2）
孤立特異点と留数

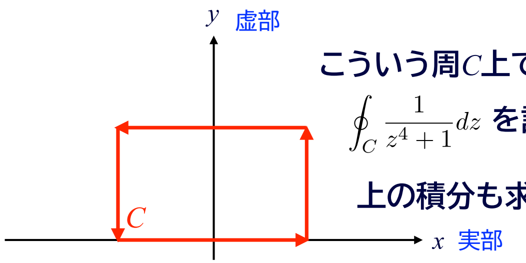
関西大学総合情報学部
浅野 晃

なにをするんでしたっけ？🤔

こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$$ まっとうには計算できません。

そこで　数直線を　複素平面に拡張 $z = x + yi$



こういう周C上で

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz$$ を計算すると

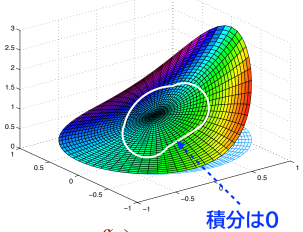
上の積分も求まる

前回の復習
コーシーの積分定理

コーシーの積分定理

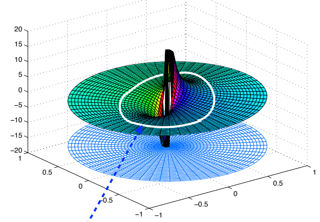
複素関数 $f(z)$ が，領域 D での正則関数で
経路 C が，D 内にある単純閉曲線ならば

$$\int_C f(z)dz = 0$$



ここからの話は

正則でない点を囲んで積分したら？



正則でない「穴」によって決まる

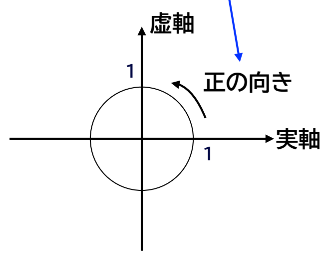
$f(z) = z^n$ の積分

z^n の積分を考える

関数をべき級数で表して,各項の積分を考えるため

$f(z) = z^n$ を，単位円周 C に沿って正の向きに回って積分する

複素平面において
原点を中心とする
半径1の円周



z^n の積分を考える

$n = 0, 1, 2, \ldots$ のとき

$f(z) = z^0, z^1, z^2, \ldots$ が単位円周 C の内部で正則なので

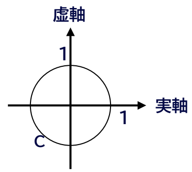
コーシーの積分定理により $\displaystyle\oint_C f(z)dz = 0$

z^n の積分を考える

$n = -1, -2, -3, \ldots$ のとき

ややこしいので，あらためて $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ とおいて $n = 1,2,3,\ldots$ とする

経路 C 上では $\begin{array}{l} z = e^{i\theta} \\ (0 \leqq \theta < 2\pi) \end{array}$ つまり $\dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{(e^{i\theta})^n} = e^{-in\theta}$



置換積分

よって
$$\oint_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}d\theta$$

z^n の積分を考える

$f(z) = \dfrac{1}{z^n}$ について

$n = 1$ のとき
$$\oint_C \frac{1}{z}dz = i\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

n = 1

$n = 2, 3, \ldots$ のとき
$$\oint_C \frac{1}{z^n}dz = \frac{i}{i(1-n)}\left[e^{i(1-n)\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{1-n}\left[e^{2(1-n)\pi i} - 1\right]$$

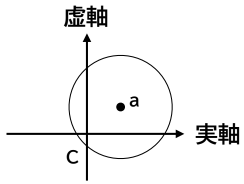
$e^{2(1-n)\pi i} = \cos(2(1-n)\pi) + i\sin(2(1-n)\pi) = 1$ より $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^n}dz = 0$

z^n の積分を考える

つまり
$$\oint_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i \qquad \oint_C \frac{1}{z^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

また，a を中心とする半径1の円周を C とすると

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n}dz = \begin{cases} 2\pi i & n = 1 \\ 0 & n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$



コーシーの積分公式

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は，その点を囲む閉曲線上の値だけできまる

領域 D で正則な関数 f の，点 z における値 $f(z)$ は，
D 内で点 z を囲み，正の方向に1周する閉曲線 C 上の積分

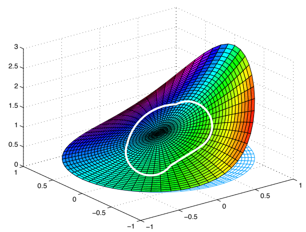
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$ で表される

$z = 0$ のときは,原点を囲み，正の方向に1周する閉曲線 C 上の積分

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$$ で表される

コーシーの積分公式

正則関数の任意の点での値は，その点を囲む閉曲線上の値だけできまる



$f(z) = e^z$

正則関数は
「折り目なく」
曲がっているから，

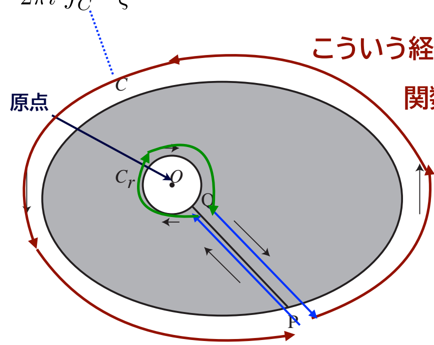
周囲（囲む閉曲線上）の値によって
その中心の値が決まってしまっても
不思議ではない

コーシーの積分公式

$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$ のほうの証明を考える

こういう経路で

関数 $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ を積分



原点では正則でないが

グレーの部分では正則

コーシーの積分定理により，
積分＝0

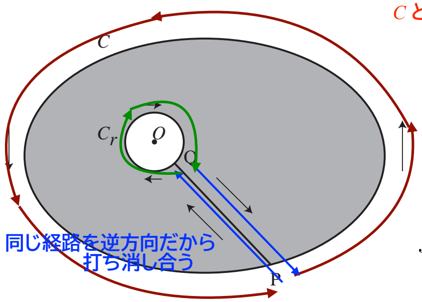
コーシーの積分公式

グレーの部分では正則　コーシーの積分定理により，

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int_P^Q \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + \int_Q^P \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = 0$$

C とは逆回りだからマイナス

$$\oint_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = -\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$



つまり

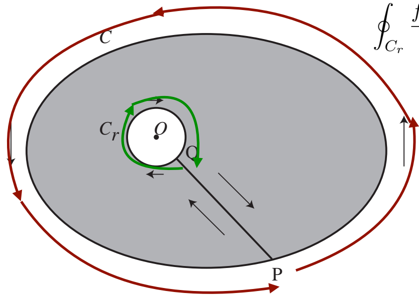
$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

コーシーの積分公式

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta = \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$ 内側の円の半径→0とすると

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta}d\zeta$$ に収束する（詳細略）

$$\oint_{C_r} \frac{f(0)}{\zeta}d\zeta = f(0)\oint_{C_r} \frac{1}{\zeta}d\zeta = 2\pi i f(0)$$



よって $$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$$

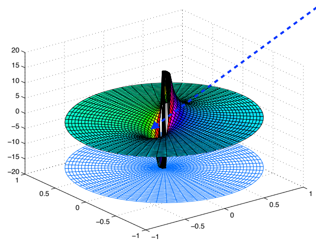
※コーシーの積分公式から，
「正則関数は何度でも微分できる」ことが
導かれる（概略は付録で）

孤立特異点と
ローラン級数展開

ここからの見通し

孤立特異点とは

こういう，正則関数にあいた「穴」
（1点を除いて正則）

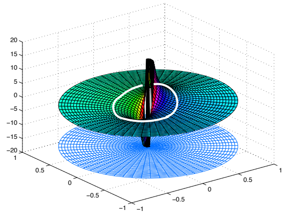


$f(z) = 1 / z$

ここからの見通し

孤立特異点をもつ関数について

孤立特異点の周りの積分を使って
関数が級数に展開できる(ローラン級数展開)



ローラン級数を積分することで

孤立特異点の周りの積分は
「留数」だけで表されることがわかる

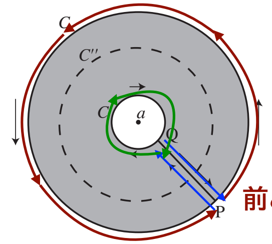
留数を別途求められれば，積分が簡単に求まる

ローラン級数展開

孤立特異点の周りの経路で積分

前と同じ考えで，コーシーの積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$



前と同じ経路で

ローラン級数展開

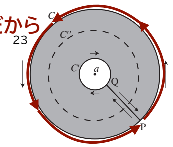
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

等比級数の和の形

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{\zeta - a}}$$

ζ は外側の経路上だから

絶対値が1より小さく，収束する



$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left\{1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

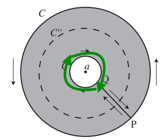
ローラン級数展開

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\left\{1 + \frac{z-a}{\zeta - a} + \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{\zeta - a}\left\{1 + \frac{\zeta-a}{z - a} + \left(\frac{\zeta-a}{z - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

こちらの ζ は内側の経路上



ローラン級数展開

以上から

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + $$
$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

孤立特異点 a のまわりのローラン級数

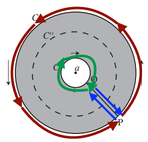
ローラン級数展開

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + $$
$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ところで



グレーの部分で $f(z)$ は正則なので，
コーシーの積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

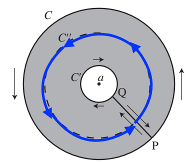
よって，a_{-n} も a_n で表すことができて

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1}d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

留数と「n位の極」

留数

関数 $f(z)$ をローラン級数展開して，C'' に沿って積分



$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + $$
$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + a_n(z-a)^n + \cdots$$

積分するとここしか残らない
ここの積分は $2\pi i$

つまり
$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C''} f(z)dz$$

$f(z)$ の孤立特異点 a における［留数（residue）］という $\mathrm{Res}(a; f)$

留数を別の方法で求められれば，$f(z)$ の積分は簡単に計算できる

「n位の極」

ローラン級数が（左側が…でなくて）
a_{-n} から始まるような孤立特異点を，[n位の極]という

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

このとき，両辺を　$(z-a)^n$ 倍すると

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots$$

つまり，$\lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = a_{-n}$

a が1位の極なら $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = a_{-1}$

「n位の極」と留数

さて，a が n位の極のとき，

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

両辺を $(z-a)^n$ 倍して

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots$$

両辺を $(n-1)$ 回微分すると

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + \frac{n!}{1!} a_0 (z-a) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1 (z-a)^2 + \cdots$$

微分によって，a_{-1} の手前の項まで消える

「n位の極」と留数

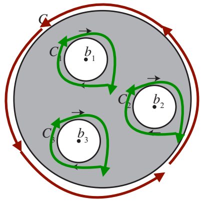
$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + \underbrace{\frac{n!}{1!} a_0 (z-a) + \frac{(n+1)!}{2!} a_1 (z-a)^2 + \cdots}_{z \to a \text{ とすると，これらの項は0}}$$

つまり留数は $\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z)$

1位の極なら $\mathrm{Res}(a; f) = a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

以上から，
孤立特異点を囲んだ閉曲線上の $f(z)$ の積分は留数で表され，
しかも n 位の極については，留数は別途求まるので，積分は求まる

孤立特異点がいくつあっても



$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \cdots = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = \mathrm{Res}(b_1; f) + \mathrm{Res}(b_2; f) + \cdots$$

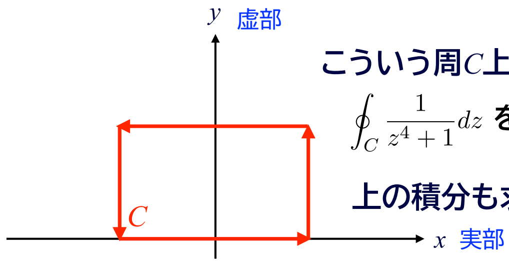
いくつかの孤立特異点を囲んだ閉曲線上の積分は，
それぞれの孤立特異点での留数がわかれば求められる

ようやく, 最初の問題へ

こんな積分は

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ まっとうには計算できません。

そこで　数直線を　複素平面に拡張 $z = x + yi$



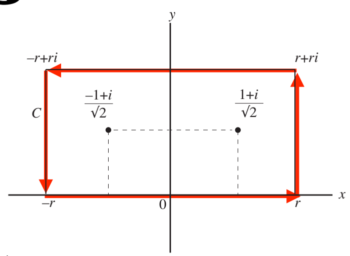
こういう周C上で

$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz$ を計算すると

上の積分も求まる

複素関数にして積分する

$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz$ を計算する　経路は



$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

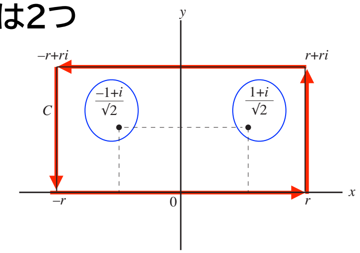
孤立特異点 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ は, すべて1位の極

展開するまでもなく

複素関数にして積分する

経路の内部にある孤立特異点は2つ

それぞれ留数を求める



1位の極だから

$\mathrm{Res}(a;f) = a_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+i}{\sqrt{2}};f) = \lim_{z\to\frac{1+i}{\sqrt{2}}} \cancel{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})}f(z) \qquad \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{\cancel{(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}})}(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(z-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{-1+i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{-1-i}{\sqrt{2}})(\frac{1+i}{\sqrt{2}}-\frac{1-i}{\sqrt{2}})}$$

$$= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

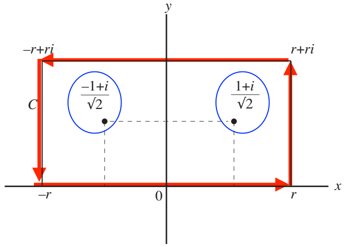
同様に $\mathrm{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}};f) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$

複素関数にして積分する

よって $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \mathrm{Res}(\frac{1+i}{\sqrt{2}}; f) + \mathrm{Res}(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}; f) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

では $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx$ は？



$r\to\infty$ のとき，実軸上以外は0
（略，テキストで）

よって $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

問題🌀
（さわりだけ）

問題

次の積分（C は原点を中心とする半径2の円周）を求めてください。

$$\frac{-1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin z}{\cos z}dz$$

なお，複素三角関数は，三角関数と指数関数の関係を拡張して，
z を複素数とするとき，下のように定義する

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

問題

次の積分（C は原点を中心とする半径2の円周）を求めてください。 $\frac{-1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin z}{\cos z}dz$

$\frac{\sin z}{\cos z}$ の孤立特異点は，$\cos z = 0$ となる点（零点）

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0$ とおくと $e^{iz}+e^{-iz}=0$で，両辺に e^{iz} をかけると $e^{2iz}+1=0$

$e^{i\theta}$ は周期 2π の周期関数（なぜならば，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ）で，また $e^{i\pi}+1=0$ より

$2iz = i(\pi \pm 2n\pi)$ すなわち $z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

問題

次の積分(C は原点を中心とする半径2の円周)を求めてください。 $\frac{-1}{2\pi i}\oint_C \frac{\sin z}{\cos z}dz$

$z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0,1,2,\ldots)$

原点を中心とする半径2の円の内部で, $z = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \quad (n = 0,1,2,\ldots)$ を

満たす z は $z = \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}$ これが孤立特異点, すなわち「穴」

よって, $\oint_C \frac{\sin z}{\cos z}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(\frac{\pi}{2};\frac{\sin z}{\cos z}) + \mathrm{Res}(-\frac{\pi}{2};\frac{\sin z}{\cos z})\right)$ あとはテキスト(演習問題の解答例)で

今日のまとめ

孤立特異点とローラン級数展開

孤立特異点の周りの積分を使って
関数を級数に展開することができる

留数

ローラン級数の形で積分すると
孤立特異点の周りの積分は留数で表せる

留数を使って積分を求める

n位の極については, 留数を別の方法で求めることで,
積分が簡単に求められる