2024 年度春学期　応用数学（解析）　第１５回

第４部・「その先の解析学」への導入／　測度論ダイジェスト (2) ルベーグ積分

積分に対する疑問 — 解決したのか？

前回の講義で，定積分 $\displaystyle\int_p^q f(x)dx$ から，p と q の間にあるすべての（可算無限個の）有理数に対応する幅 0 の線を抜き取っても，定積分の値（グラフの下の面積）は変わらない，ということをお話ししました。その説明では，可算無限個の有理数の集合はルベーグ測度が 0，すなわち零集合だから，というものでした。

一方，高校以来学んできた積分（リーマン積分）は「積分区間を有限個の区間に分ける」という操作にもとづいています。そこで，上で抜き取った可算無限個の有理数に対応して

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x\text{ は有理数} \\ 0 & x\text{ は無理数} \end{cases} \tag{1}$$

という関数（ディィリクレ関数）[1]を考えると，積分区間をいくら細かく分割しても，各分割には有理数も無理数も必ず含まれますから，前回説明したジョルダン外測度は 1，ジョルダン内測度は 0 となります。つまりこの関数の積分はジョルダン可測ではなく，区分求積法では積分の値が確定しません。すなわち，リーマン積分は不可能です。

このことは，上記の「幅 0 の線を可算無限個抜き取っても，定積分の値は変わらない」という説明は正確ではなく，ルベーグ測度にもとづいた新しい積分の定義が必要であることを示唆しています。これが**ルベーグ積分**です。

ルベーグ積分の考え方

リーマン積分では，関数 $y = f(x)$ の x のほう（定義域）を分割していました。これに対してルベーグ積分では，y のほう（値域）を分割します。

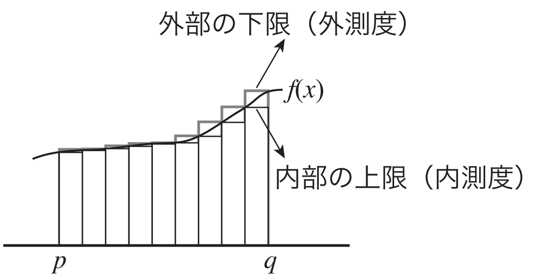

図 1: リーマン積分とジョルダン外測度・内測度

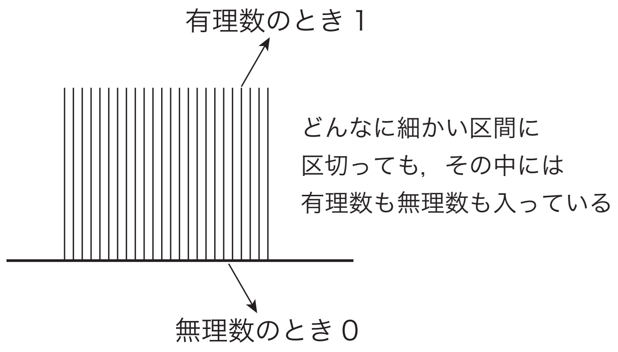

図 2: ディィリクレ関数の積分

[1] $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{k\to\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}\right)$ で表されます。

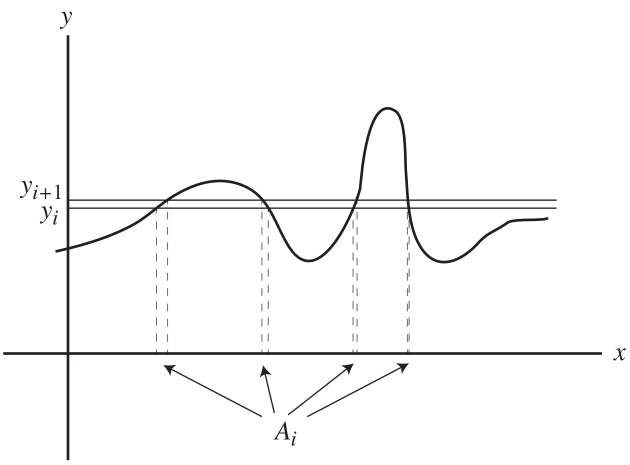

図 3: ルベーグ積分の考え方

分割点を $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ とするとき，ある y_i に対して定義域に集合 $A_i = \{a | y_i \leqq f(a) < y_{i+1}\}$ を考えて，「$y_i \times A_i$ の測度」を求めます。これを各 y_i について求めて合計したものの，分割を細かくしたものの極限を，$f(x)$ のルベーグ積分と考えます。

この方法では，集合 A_i がルベーグ可測であれば，積分を求めることができます。集合 A_i がたとえ可算無限個の部分に分かれていたとしても，ルベーグ可測であれば測度に完全加法性がありますから，大丈夫です。

リーマン積分では，関数の性質に関係なく，定義域を有限個に分けていました。そのため，ディリクレ関数のような特別な関数には対応できなくなってしまいました。ルベーグ積分は，y の分割に対して，関数の形に応じて集合 A_i が対応するので，より広い範囲の関数に対応することができます。

単関数と可測関数

ルベーグ積分を考えるため，もとの関数を階段状の関数で近似することを考えます。集合 A に対して，A の**特性関数** $\varphi(x; A)$ を

$$\varphi(x; A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{2}$$

と定義します。

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を互いに共通部分をもたない可測集合列とし，$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ とします。このとき，

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x; A_i) \tag{3}$$

で表される関数を**単関数**といいます。

単関数については，そのルベーグ積分を

$$\int_A \varphi(x) m(dx) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) \tag{4}$$

で定義します。$m(A_i)$ は A_i のルベーグ測度です。

一般の関数 $f(x)$ についても，それが単関数の極限で表されるのなら，同様にルベーグ積分が定義できるはずです。それができるためには，単関数を階段状の関数として関数 $f(x)$ の形に合わせて近似するとき，そこに現れる集合 A_i がつねに可測集合である必要があります。

すなわち，任意の実数 a, b について，集合 $\{x|a \leqq f(x) < b\}$ が可測集合でなければなりません。このような関数を**可測関数**といいます。

可測関数のルベーグ積分

可測関数 $f(x) \geqq 0$ について，可測集合 A 上の $f(x)$ のルベーグ積分を

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup \int_A \varphi(x)m(dx) \tag{5}$$

と定義します。ここでいう上限 (sup) は，「$0 \leqq \varphi(x) \leqq f(x)$ をみたすすべての単関数」にわたっての上限をさします。つまり，$f(x)$ を単関数で下から（内側から）近似したときの，もっともよい近似によって，積分が得られる，としています。

$f(x)$ が負の値もとるときは，正の値をとるときと負の値をとるときに分けて，負の値をとる部分を正負反転して考えます。$f^+(x) = \max(f(x), 0)$，$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ とすると，$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ となります。そこで，

$$\int_A f(x)m(dx) = \int_A f^+(x)m(dx) - \int_A f^-(x)m(dx) \tag{6}$$

と定義します。

このような単関数による近似で積分が定義できるのは，次の定理があるからです。

> $f(x)$ を可測関数とし，$f(x) \geqq 0$ とする。このとき，単関数の増加列
>
> $$0 \leqq \varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x) \leqq \cdots \tag{7}$$
>
> が存在して
>
> $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{8}$$
>
> がなりたつ。

これを証明するために，n を自然数として

$$\begin{aligned} A_k^{(n)} &= \left\{x \,\middle|\, \frac{k}{2^n} \leqq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n - 1) \\ A^{(n)} &= \{x|f(x) \geqq n\} \end{aligned} \tag{9}$$

とおきます。これは，前々節で述べた「値域のほうを分割する」ことに相当します。

$f(x)$ は可測関数なので，$A_k^{(n)}, A^{(n)}$ は可測集合です。これらの集合は，互いに共通部分がなく，かつそれらの結びが $f(x)$ の定義域全体に対応しています。そこで，単関数 $\varphi_n(x)$ を

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n}\varphi(x; A_k^{(n)}) + n\varphi(x; A^{(n)}) \tag{10}$$

とおくと，関数列 $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$ は (7) 式の単調増加性を満たしています。

一方，ある自然数 N について，$f(x)$ の $f(x) < N$ となる部分については，$n \geqq N$ のとき (9) 式の上の式から

$$|f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \tag{11}$$

となります。また，$f(x) = +\infty$ [2]のところでは $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty$ となります。このことは，各点 x で $\varphi_n(x)$ が $f(x)$ に収束（各点収束）することを意味しています。■

再び最初の問題へ，そして発展

以上の議論をふまえて，最初の「ディリクレ関数 $h(x)$ の積分」の問題を考えてみます。この関数は，有理数全体を $\boldsymbol{Q}$，実数全体を $\boldsymbol{R}$ であらわすと，

$$h(x) = 1 \times \varphi(x; \boldsymbol{Q}) + 0 \times \varphi(x; \boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q}) \tag{12}$$

という単関数になり[3]，$\boldsymbol{Q}$ のルベーグ測度 $m(\boldsymbol{Q})$ は 0 ですから，任意の積分区間で $h(x)$ の積分は 0 となります。

確率と可測集合

ここまでの説明では，最初の問題との関連から，1 次元関数を想定していました。しかし，今回説明したルベーグ積分の定義では，定義域が 1 次元の実数値である必要はないことがわかると思います。実際，ルベーグ積分は「ルベーグ可測な集合に対して定義された可測関数」について組み立てられています。

可測集合とは数の集まりだけではなく，例えば，「事象の集合」とそれに対応する確率という測度で定義することもできます。そこで，ここでは可測集合を扱う例として，確率を測度として記述してみましょう。[4]。

事象と集合，可測空間

「さいころの各目が出る確率はいずれも 1/6」といわれますが，これは「確率のラプラスの定義」といわれるもので，「さいころの $1, 2, \ldots, 6$ の 6 種類目が出る確率はどれも等しい（同様に確からしい）」と考えて，それぞれの確率を 1/6 と定義したものです。

この例の場合は，「さいころをふる」というランダム現象の結果は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の 6 通りでした。このように「すべての可能な結果」の集合を**標本空間**といいます。さいころの例では，標本空間は有限集合ですから，その要素である 1, 2, 3, 4, 5, 6 にそれぞれ確率 1/6 を割り当てました。

しかし，標本空間が「連続的に動く時計の針を目を閉じて止めたときの、止まった位置と 0 時の位置との間の角度」となると，標本空間はある区間の実数の集合となります。その要素はもちろん有限個ではなく，それどころか可算でもありません。つまり，ひとつひとつの要素を数えあげることができませんから，それらに確率を割り当てることはできません[5]。

---

[2] ルベーグ積分論では，このように無限大を数として扱う記述が便利なのでよく用いられます。

[3] $\boldsymbol{R} \backslash \boldsymbol{Q}$ は，実数全体 $\boldsymbol{R}$ から有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ を除いたもの，すなわち「無理数全体」です。

[4] これについては，私の講義「解析応用」で 2013 年度まで取り扱っていましたが，現在はこの科目は開講していません。

[5] このあたりのことは，1 年生向けの統計学の講義では「連続型確率分布の矛盾」として紹介しています。詳しくは，私の講義「統計学」第１１回の付録「離散と連続の間」を参照してください。

そこで，標本空間の要素ではなく，標本空間の部分集合に確率を割り当てることにします。さいころの例でいえば，「1または2の目（が出る）」は部分集合です。時計の針の例でいえば，「1時から3時の間の角度（に止まる）」は部分集合です。ここでは，これらの部分集合を**事象**といいます。

このとき，標本空間Ωに対して，確率を割り当てることのできる部分集合の集合（集合族）$\mathscr{F}$は，以下の条件を満たすものに制限することとします。

1. $\Omega \in \mathscr{F}$
2. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$

この条件を満たす$\mathscr{F}$を，Ω上の$\boldsymbol{\sigma-}$**集合体**といいます。条件1は，標本空間全体，すなわち**全事象**には必ず確率を割り当てることを示しています。条件2は，ある事象Aに確率を割り当てるのならば，その補集合A^c，すなわち**余事象**にも必ず確率を割り当てることを示しています。条件3.は，事象$A_1, A_2, \ldots$に確率を割り当てるならば，その和集合，すなわち**和事象**にも必ず確率を割り当てることを示しています。

Ωの部分集合全体，すなわちΩの**べき集合**$\mathfrak{P}(\Omega)$は，明らかにΩ上の$\sigma-$集合体です。しかし，Ω上の$\sigma-$集合体はこれだけではなく，例えば$\{\emptyset, \Omega\}$もΩ上の$\sigma-$集合体です。

標本空間Ωとその上の$\sigma-$集合体$\mathscr{F}$の組を**可測空間**$(\Omega, \mathscr{F})$といいます。

確率測度

$\sigma-$集合体の要素，すなわち標本空間の部分集合，つまり事象に割り当てられる確率は，「可測空間を測る測度」の形で定義されます。$\sigma-$集合体$\mathscr{F}$の要素の関数Pで，次の条件を満たすものを**確率測度**といいます。

1. すべての$A \in \mathscr{F}$について，$P(A) \geqq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_i \in \mathscr{F}$かつ$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

条件1は，確率が正の数または0であることをいっています。条件2は，全事象の確率が1，すなわち「$\mathscr{F}$のうち，何でもよいからいずれかの事象がおきる確率は1」といっています。条件3は，共通部分のない各集合（**排反**な各事象）に対する確率の合計は，それらの和集合（和事象）に対する確率である，といっています。これはつまり，前回の講義で説明した「完全加法性」です。可測空間$(\Omega, \mathscr{F})$とそれに対する確率測度Pをあわせた$(\Omega, \mathscr{F}, P)$を**確率空間**といいます。

例えば，コインを1回投げるという試行を考え，表が出るという事象をH，裏が出るという事象をTとすると，標本空間は$\Omega = \{H, T\}$です。Ωに対して集合族$\mathscr{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$を考えると，$\mathscr{F}$は$\sigma-$集合体です。このとき，関数$P$を$P(\emptyset) = 0, P(\{H\}) = p, P(\{T\}) = 1 - p, P(\Omega) = 1 \ (0 \leqq p \leqq 1)$とすると，関数$P$は確率測度の条件を満たしており，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$は確率空間となります。常識的なラプラスの定義では，「正しいコイン」なら$p = 1/2$と考えていることになります。

このとき，標本空間 Ω に対して集合族 $\mathscr{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ としても，$\mathscr{F}$ は $\sigma-$ 集合体です。このとき，関数 P を $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ とすると，やはり関数 P は確率測度の条件を満たしており，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間となります。確率空間の作り方は一通りではありません。

（この続き，離散型確率空間と連続型確率空間，累積分布関数，確率密度関数については，2013 年度秋学期「解析応用」のテキストを参照してください。）

問題

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ について，集合 $A, B \in \mathscr{F}$ のとき，下記を証明してください。

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

参考文献

志賀浩二，ルベーグ積分３０講，朝倉書店，1990. ISBN4-254-11484-2
佐藤坦，はじめての確率論　測度から確率へ，共立出版，1994. ISBN978-4320-014732
森真，入門確率解析とルベーグ積分，東京図書， 2012. ISBN978-4-489-02129-9