

2024年度春学期

# 応用数学(解析)

第4部・「その先の解析学」への導入 /

第15回

測度論ダイジェスト(2)

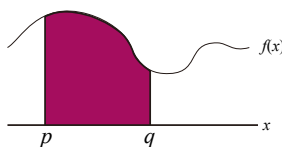
ルベーグ積分



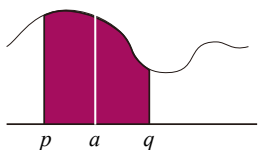
関西大学総合情報学部  
浅野 晃

依然,  
積分に対する疑問🤔

## 積分に対する疑問



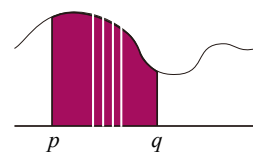
積分  $\int_p^q f(x) dx$



$\int_a^a f(x) dx = 0$  だから,

$a$  のところで幅0の直線を抜いても  
積分の値は変わらない

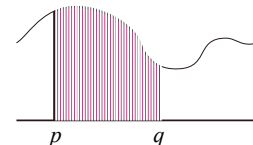
## 積分に対する疑問



$\int_a^a f(x) dx = 0$

幅0の直線を何本抜いても  
積分の値は変わらない

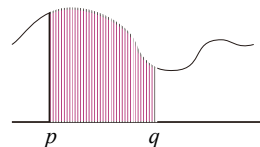
どれだけ拡大してみても,  
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を抜いても  
積分の値は変わらないのか?

## 積分に対する疑問(再び)

どれだけ拡大してみても、  
びっしりと直線がならんでいる



可算無限個の直線を抜いても  
積分の値は変わらないのか？

この疑問に答えるために、  
 $p$  と  $q$  の間にある有理数全体が占める幅を考える  
可算無限個ある

## 有理数全体が占める幅(再び)

可算無限個ある有理数の幅を考えるには  
ルベーグ測度の考え方が必要

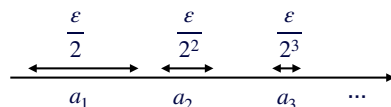
有理数全体の集合が数直線上で持つ幅(測度)

有理数全体を、区間の組み合わせで覆ったときの  
「区間の長さの合計」の下限

## 有理数全体が占める幅(再び)

$\varepsilon$  を任意の正の数とすると

有理数  $a_1, a_2, \dots$  を こういうふうに覆うことができる



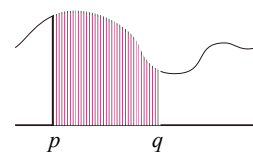
区間の長さの合計

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \dots = \varepsilon$$

その下限は0 有理数全体のルベーグ測度は0

## 積分に対する疑問

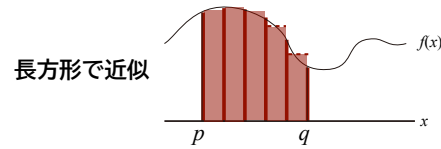
この疑問はまだ解決していない。そもそも、



「有理数の位置にある可算無限個の直線を  
抜いた」積分は、どうやって求めるのか？

ジョルダン測度にもとづく積分では、可算無限個の分割はできない

## 区分求積法で積分を求める(再び)

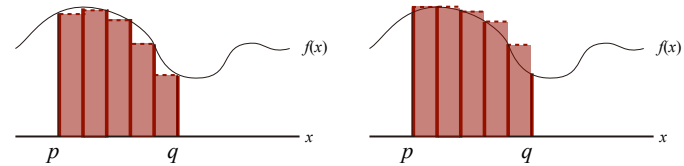


積分  $\int_p^q f(x)dx$  は,

積分区間を 重ならない、有限個の 区間に分けて、  
その上の長方形の面積の極限

「極限」とは、無限ではなく有限

## ジョルダン測度(再び)



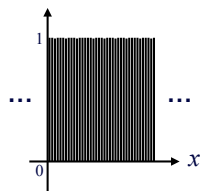
この上  
ジョルダン内測度

この下  
ジョルダン外測度

両者が一致するとき **ジョルダン測度** という  
2次元の場合これを **面積** という

ジョルダン測度が定まる図形(集合)を **ジョルダン可測** という

## こんな関数の積分は

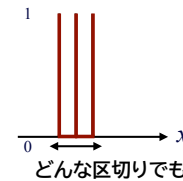


ディリクレ関数

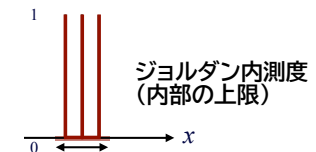
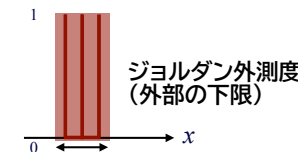
$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$x$  軸上をどんなに細かく区切っても、  
区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する

## ディリクレ関数の積分



$x$  軸上をどんなに細かく区切っても、  
区切りの中に有理数も無理数も必ず存在する

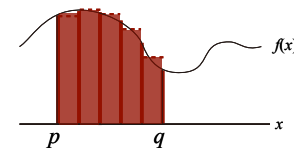


一致しないので、ジョルダン可測でなく、リーマン積分はできない

ルベーグ測度にもとづく **ルベーグ積分** を考える

## ルベーク積分 🤔

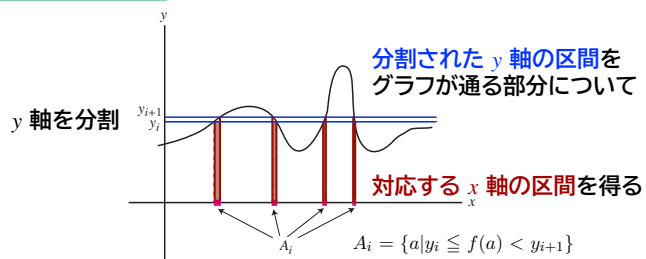
## 何がいけなかったのか



区分求積をするときに、 $x$  軸上を無理に分割しようとするから、有限個に分割できないとき困る

$y$  軸上のほうを分割し、  
 $x$  軸のほうは、それに対応して分割されるようにすればいい

## ルベーク積分の考え方



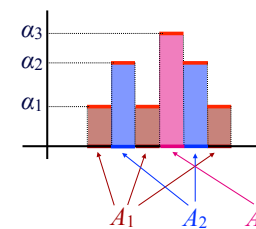
$y_i \times (A_i \text{ のルベーク測度})$  を求める

これを各  $y_i$  について合計したものの、分割を細かくしたときの極限

$A_i$  がたとえ可算無限個に分れていても、  
ルベーク可測なら完全加法性があるから合計できる

## 単関数とルベーク積分

[単関数]:  
こういう階段状の関数



$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x; A_i)$$

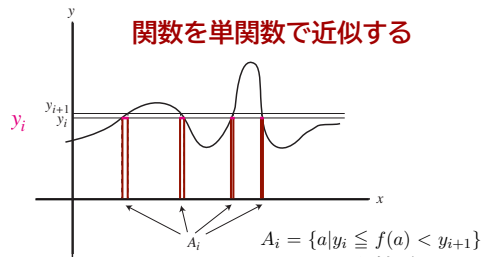
$x$  が  $A_i$  にあるとき値が1, 他は0  
[特性関数]

単関数のルベーク積分

$$\int_A \varphi(x) m(dx) = \sum_{i=1}^n \alpha_i m(A_i)$$

$\alpha_i \times A_i$  のルベーク測度

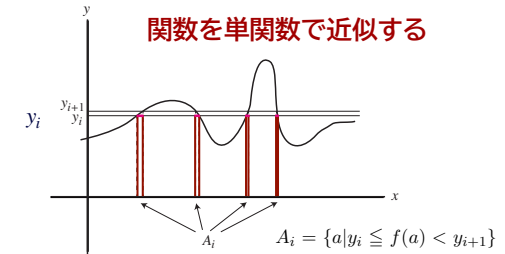
## 可測関数



単関数で近似できるためには、  
どのように  $y$  軸を分割しても、図の  $A_i$  が可測でなければならない

任意の  $a, b$  について  $\{x \mid a \leq f(x) < b\}$  が可測 **【可測関数】**

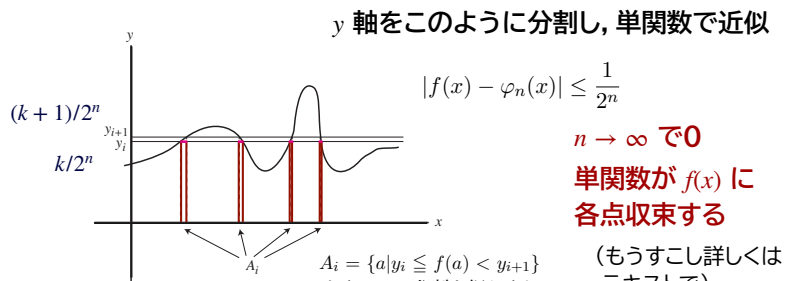
## 可測関数のルベーグ積分



一番よい近似のとき  
可測関数のルベーグ積分  $\int_A f(x)m(dx) = \sup \int_A \varphi(x)m(dx)$   
単関数で近似

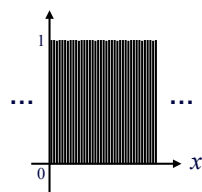
## 可測関数のルベーグ積分

$$\int_A f(x)m(dx) = \sup \int_A \varphi(x)m(dx) \quad \text{本当に sup で近似できるか?}$$



積分に対する疑問の答💡

## ディリクレ関数の積分



ディリクレ関数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

$$h(x) = 1 \times \varphi(x; \mathbb{Q}) + 0 \times \varphi(x; \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \text{ という単関数}$$

$x$  が有理数のとき1

$x$  が無理数のとき1

有理数のルベグ測度は0

つまり、 $h(x)$  をどんな積分区間で積分しても0

## ここまでのまとめ

### ルベグ積分

$x$  軸を細かく分割するのではなく、  
 $y$  軸を分割して、それにしたがって  $x$  軸が分割される

分割された  $x$  軸の区間の長さはルベグ測度で測るから、  
区間が可算無限個あってもよい

### $x$ 軸でなくても

ルベグ可測な集合に対する可測関数ならOK

例：事象の集合と確率

## 確率と可測集合

## 標本空間

さいころの各目が出る確率は、いずれも1/6?

すべての可能な目は  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  で、いずれも  
「同様に確からしい」と考えて、それぞれに確率1/6を割り当てている  
(ラプラスの定義)

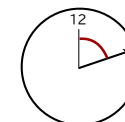
[標本空間]

連続的に動く時計の針を、目を閉じて止める

針と0時の位置との間が、ある角度になる確率?

この角度は標本空間だが、「 $0^\circ \sim 360^\circ$ の実数の集合」

なので、要素が可算でない **確率を割り当てることはできない**



## 事象

標本空間の要素ではなく、標本空間の部分集合に確率を割り当てる

- 「1または2の目」(が出る) [事象]
- 「1時から3時の間の角度」(に止まる) これらは事象

確率を割り当てることのできる部分集合は、  
標本空間を  $\Omega$  とするとき、次の集合族(部分集合の集合)  $\mathcal{F}$  に限る [ $\sigma$ -集合体]

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$  標本空間全体([全事象])には確率を割り当てる
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$  確率を割り当てられた集合の補集合([余事象])には確率を割り当てる
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  確率を割り当てられた集合の和集合([和事象])には確率を割り当てる

## 確率測度

標本空間  $\Omega$  と、 $\sigma$ -集合体  $\mathcal{F}$  の組  $(\Omega, \mathcal{F})$  を[可測空間]という

可測空間に割り当てられる測度  $P$  ([確率測度])を、  
次の3つを満たすものとする

1. すべての  $A \in \mathcal{F}$  について、 $P(A) \geq 0$  確率は正の値または0
2.  $P(\Omega) = 1$  全事象の確率は1(「何でもよいから何かがおきる」確率は1)
3.  $A_i \in \mathcal{F}$  かつ  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )  $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$   
排反な各事象の和集合(和事象)に対する確率は各事象に対する確率の和 (つまり「完全加法性」)

標本空間  $\Omega$  と、 $\sigma$ -集合体  $\mathcal{F}$  , 確率測度  $P$  の組  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を[確率空間]という

## 確率測度と確率空間の例

コインを1回投げる  
表が出るという事象をH, 裏が出るという事象をT 標本空間  $\Omega = \{H, T\}$

$\sigma$ -集合体  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega\}$  この可測空間に対して、確率測度  $P$  を

$$P(\emptyset) = 0, P(\{H\}) = p, P(\{T\}) = 1 - p, P(\Omega) = 1 \quad (0 \leq p \leq 1)$$

と割り当てると、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  は確率空間になっている

「正しいコイン」なら、 $p = \frac{1}{2}$

一方、

$\sigma$ -集合体  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  としても、 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間に  
確率測度  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$  なっている

(この続きは「解析応用」テキストで)

問題について🌀

# 問題の(1)

確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  について, 集合  $A, B \in \mathcal{F}$  のとき,

$P(\emptyset) = 0$  を証明せよ

$A_1 = \Omega, A_i = \emptyset (i = 2, 3, \dots)$  とすると  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$

確率測度の定義の条件3より 排反な各事象の和集合(和事象)に対する確率は各事象に対する確率の和

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

$$P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

条件2より  
 $P(\Omega) = 1$

条件1より  
 $P(\cdot) \geq 0$  だから  
 $P(\emptyset) = 0$

(問題(2)~(5)についてはテキストの解答例で)