

区間推定に関連して

不等式

不等式とは、数値や定数・変数の間の大小関係を表す式です。 $x < y$ と書いてあれば、「 x は y よりも小さい」「 y は x よりも大きい」という関係を表します。また、 $x \leq y$ と書いてあれば、「 x は y 以下である」「 y は x 以上である」という意味を表します。なお、 \geq と \geq 、 \leq と \leq は、それぞれ同じ意味です。

また、不等号を2つ使って「 $a \leq x \leq b$ 」と書くと、これは「 x は a 以上 b 以下の範囲にある」という意味で、範囲を表す表現になります。

等号で結ばれた「等式」の場合は、両辺に何を足しても引いても、あるいは両辺に何をかけても、両辺を何で割っても、その等式はなりたちます。つまり、 $x = y$ ならば、 $x + 2 = y + 2$ 、 $x - 2 = y - 2$ 、 $2x = 2y$ 、 $x/2 = y/2$ がいずれもなりたちます。方程式を解くには、この性質を使うわけですが、不等式の場合は少し様子が違います。

足し算引き算の場合は等式と同じで、両辺に何を足しても引いても、その不等式はなりたちます。例えば、 $3 < 5$ ですから、 $3 + 2 < 5 + 2$ であり $3 - 2 < 5 - 2$ です。一方、掛け算割り算の場合は、**両辺に負の数を掛けたり、両辺を負の数で割ると、不等号の向きが逆になる**という性質があります。例えば、 $3 \times (-1) = -3$ 、 $5 \times (-1) = -5$ ですから、 $3 < 5$ ですが $3 \times (-1) > 5 \times (-1)$ となります。割り算も同様で、 $3/(-1) = -3$ 、 $5/(-1) = -5$ ですから、 $3 < 5$ ですが $3/(-1) > 5/(-1)$ となります。

不等式を解く

上記の性質を使って、第12回「区間推定」のプリントに出てきた、不等式の変形を見てみましょう。ここでは、

$$P(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96) = 0.95 \quad (1)$$

という式から、

$$P(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}) = 0.95 \quad (2)$$

という、 μ の範囲を表す式を導いています。これを、**不等式を μ について解く**といいます。

まず、(1)式にある

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96 \quad (3)$$

という不等式を見てみましょう。まず、各辺に $\sqrt{\sigma^2/n}$ を掛けて、真ん中の分数の分母を打ち消します¹。 $\sqrt{\quad}$ は「平方根のうち正のもの」を表すと決まっていますので、前節で述べたことから、各辺に $\sqrt{\sigma^2/n}$ を掛けても不等号の向きは変わりません。したがって、

$$-1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \bar{X} - \mu \leq 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \quad (4)$$

がなりたちます。さらに、各辺から \bar{X} を引いても不等号の向きは変わりませんから、

$$-1.96\sqrt{\sigma^2/n} - \bar{X} \leq -\mu \leq 1.96\sqrt{\sigma^2/n} - \bar{X} \quad (5)$$

¹「分母を払う」といいます。

となります。この不等式の各辺に -1 を掛けると、今度は不等号の向きが逆になって、

$$1.96\sqrt{\sigma^2/n} + \bar{X} \geq \mu \geq -1.96\sqrt{\sigma^2/n} + \bar{X} \quad (6)$$

となります。

このままでは、不等号の向きが元とは逆になって読みづらいので、不等号が同じ向きになるように、左辺と右辺を入れ替えて書きます。

$$-1.96\sqrt{\sigma^2/n} + \bar{X} \leq \mu \leq 1.96\sqrt{\sigma^2/n} + \bar{X} \quad (7)$$

右辺・左辺の項の順序を変えると

$$\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \quad (8)$$

となり、(2) 式の関係が得られます。