

2024年度春学期

統計学

第9回

確からしさを記述する

— 確率



関西大学総合情報学部
浅野 晃

標本調査と確率

分布全体を調べるのではなく、一部だけ(標本)を調べる

それで分布全体のような気がするの？

わかります。かなりの程度わかります。

標本を選ぶのに、くじびきで選ぶ(無作為抽出)

くじびきで選べば、たいていはいろいろな人がまんべんなく選ばれる

たまには「まんべんなくない」のか？

はい。ただ、その「たまには」の確率を求められます。

「確率」って、よく聞くけれど🤔

※「確立」という書き間違いを見ると、かなりがっかりします🙄

※中国語では「概率」あるいは「機率」というそうです

「降水確率40%」って？

何の割合が40%？

機会

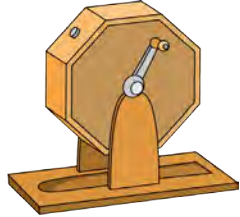
現在と同じ気象状況が
これから何度も何度も起きるとすると
そのうち40%の場合で雨になる

機会のうちの雨の割合が40%

可能性の集合

くじびき

※この機械は「新井式廻轉抽籤器」というそうです(リンク参照)



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

↓くじをひくと

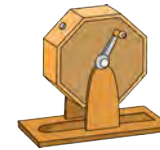
当たった!

現実には起きたのは、
これだけ

他のことは起きていない

可能性の集合

しかし



当たった

他の可能性もあった

はずれ 当たり はずれ

こうなるかも知れなかった

「偶然」(人知が及ばない)

[ランダム現象]という

可能性の集合



当たった

現実 可能性

はずれ 当たり はずれ

可能性のうち
どの結果になりやすいか?

を、数値で表せないか?
(ギャンブラーの数学)

「確率」の定義💡

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は、
[事象] event

そのできごとがおきる可能性のある、十分多くの機会があるとき、
[試行] trial
それらの機会のうち、そのできごとがおきる機会の数の割合

くじを十分多くの回数ひくとき、10回中3回の割合で当たるなら、確率0.3
十分多くの人がそれぞれ1回くじをひくと、10人中3人の割合で当たる、でも同じ

※確率は「割合」なので、「大きい・小さい」と表現します。「高い・低い」なのは「可能性」です。

頻度による確率の定義

あるできごとがおきる確率は、

そのできごとがおきる可能性のある
十分多くの機会があるとき、
おかしな点(1) おかしな点(2)

それらの機会のうち
そのできごとがおきる機会の数の割合

確率の定義・おかしな点(1)

「十分多くの機会」?

数学でいう「十分多く」とは、

だれかが「十分ではない」といったら、
それに応じていくらでも多くすること
ことができる、ということ

現実には無理 🙄

確率の定義・おかしな点(2)

機会が「ある」とき?

機会が「あった」ではない

つまり、未来におきるできごとの話をしている。

未来のことはわからない。

確率は測定できないけれど

「十分多くの機会」は現実には無理
未来のことはわからない

人間の思考の限界？🤔

でも

過去を未来に延長できると考える (「自然の斉一性」)

十分多くは無理でも、
「そこそこ多く」の機会があれば [大数の法則]
そこそこの精度で確率を推定できる

というわけで確率は

「十分多くの機会」に関する話を、次の1回の機会にあてはめている

ギャンブラーは、
日常的に賭けをしているから、
確率の大きなできごとを見抜いて賭ければ、
全体として勝つことができる

どんな名ギャンブラーでも、1回の賭けに
必ず勝つことはできない

もうひとつの確率の定義🤔

さいころで1が出る確率

なぜ1/6なのか？

$$\frac{\text{「1」は1通り}}{\text{1, 2, 3, 4, 5, 6の6通り}} = 1/6$$

確率の[ラプラスの定義]という

さっきの「頻度による定義」とは違う…🤔

ラプラスの定義の意味

$$\frac{\begin{array}{l} n \text{ 回} \\ \text{「1」は1通り} \end{array}}{\begin{array}{l} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ の6通り} \\ n \text{ 回 } n \text{ } n \text{ } n \text{ } n \text{ } n \end{array}} = \frac{n/(6n)}{1/6} = 1/6$$

1~6が皆同じ確率で出る, と認めるなら,
「同様に確からしい」 *equally likely*

さいころを $6n$ 回ふる。(n は大きい)
 n が十分大きければ, 1~6は同じ回数出る (頻度による定義)

ラプラスの定義の意味

1~6が皆同じ確率で出る, と認めるなら
「同様に確からしい」

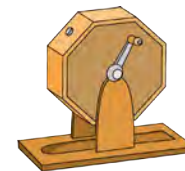
正しいと証明する方法はない

このさいころは偏っていないだろうという
「信頼」によって認めているだけ

条件付き確率と独立 🤔

統計学でいう「独立」とは

2つのランダム現象がおきるとき, 一方の結果がもう一方に影響しない



2度続けてひくとき,

1度めで出た玉を戻さなければ, 独立でない

1度めで当たりが出ると,
2度めは当たりが減っている

正確には[条件付き確率]を使って定義する

条件付き確率

「雨が降る確率」

「雨の予報が出ているときに雨が降る確率」 ← ふつう、こちらの方が大きい

条件付き確率とは、

何かがおきたときに

何かがおきるとわかったときに

何かがおきるのが確実なときに

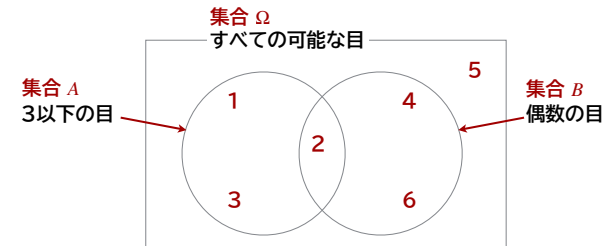
別のことがおきる確率

「何か」がおきることの影響を受けることがある
(「何か」と「別のこと」に因果関係がなくても)

さいころの例で

集合を表す「ベン図」を使って考える

さいころの「可能な目」は、1,2,3,4,5,6



集合と確率

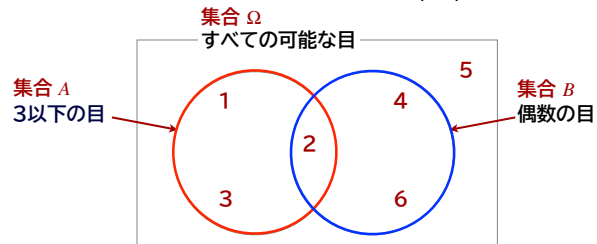
集合 X の要素の数を $|X|$ で表す

「3以下の目が出る確率」

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \quad P(A) \text{ で表す}$$

「偶数の目が出る確率」

$$\frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} \quad P(B) \text{ で表す}$$



集合と確率

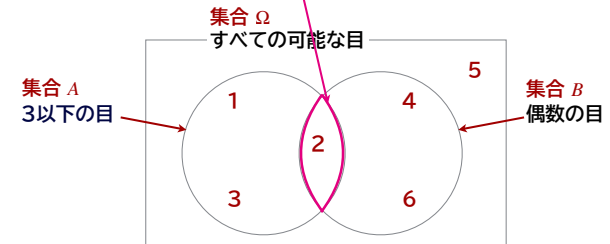
「3以下で、かつ偶数の目が出る確率」

$$\frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

$P(A \cap B)$ で表す

3以下でかつ偶数の目の集合

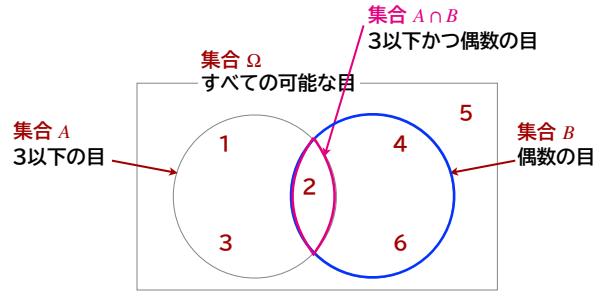
$A \cap B$ で表す



この式は何を表す？

$$\frac{|A \cap B|}{|B|}$$

分母が Ω ではなく B
 「可能なすべての目」は、 Ω ではなく B になった



条件つき確率

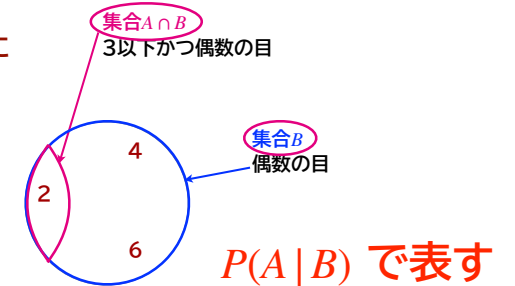
$$\frac{|A \cap B|}{|B|}$$

分母が Ω ではなく B
 「可能なすべての目」は、 Ω ではなく B になった

偶数の目が出るとわかっているときに

わかっています
 「3以下かつ偶数」の目が出る確率

偶数が出ることを条件とする、
 3以下が出る[条件つき確率]



条件つき確率

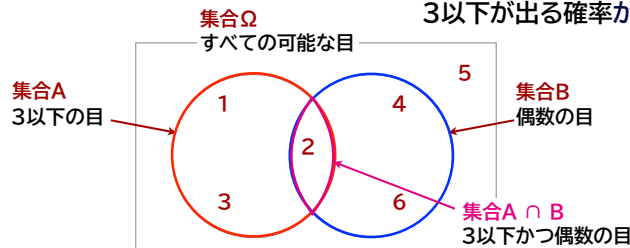
「3以下の目が出る確率」

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

偶数が出ることを条件とする、
 3以下が出る条件つき確率

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

「偶数が出る」という情報によって、
 3以下が出る確率が変化した



「2以下の目」だったら

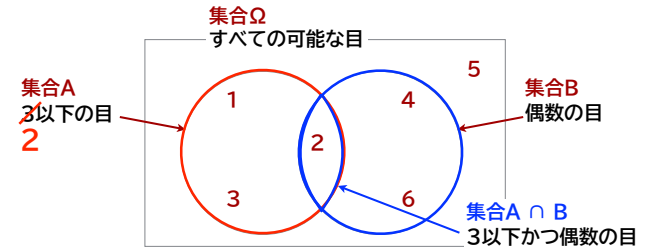
「2以下の目が出る確率」

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

偶数が出ることを条件とする、
 2以下が出る条件つき確率

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

つまり $P(A) = P(A|B)$



「独立」

「2以下の目が出る確率」

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

偶数が出ることを条件とする、
2以下が出る条件つき確率

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

つまり $P(A) = P(A|B)$

2以下が出る確率は、「偶数が出る」という
情報によっても、変化しない

$P(A) = P(A|B)$ のとき「事象 A と事象 B は独立」という

A と B が独立 = 「 B が起きる」ことがわかってても、
 A が起きる確率には影響がない

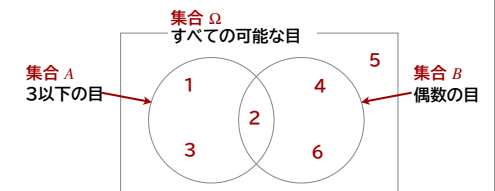
確率の積の法則

B を条件とする、 A の条件つき確率

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{|A \cap B|}{|B|} \\ &= \left(\frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \right) / \left(\frac{|B|}{|\Omega|} \right) \\ &= P(A \cap B) / P(B) \end{aligned}$$

つまり

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$



確率の積の法則

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

A と B の両方が
起きる確率

とりあえず B が
起きるものとして、
そのときに A が起きる確率

ところで、
 B が本当に起きる確率

A と B が独立のときは、 $P(A|B) = P(A)$ だから

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

A と B が独立のときだけ、こうなることに注意

※勝手に独立にはいけません。

モンティ・ホール問題 ▶

モンティ・ホール問題

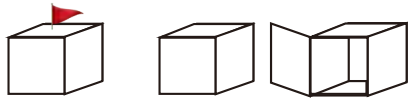
モンティ・ホール氏が司会するテレビ番組

箱が3つあり、ひとつだけに賞品がある。

ゲストが箱をひとつ選ぶが、まだ開けない

モンティは賞品のありかを知っている。

彼は「ゲストが選ばなかった空箱」を1つ開けて

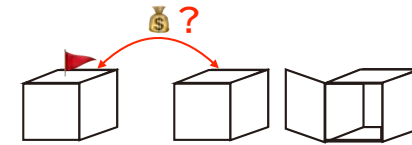


モンティ・ホール問題



「いまなら、さっき選んだ箱ではなく、
まだ開けていないもう1つの箱を選んでもかまいません」

選ぶ箱を変えるほうが、当たる確率が大きくなるか？



答えは

ゲストが選ぶ箱を変えないと、当たる確率 $1/3$

箱を変えると、当たる確率 $2/3$

箱は残り2つだから、当たる確率は、
箱を変えても変えなくても $1/2$ じゃないの？

※違います。「勝手に同確率」にはいけません。

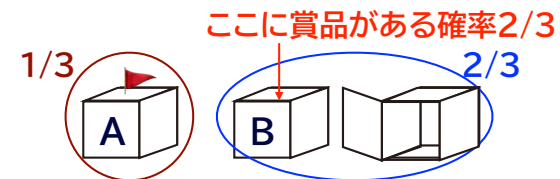
もっとも簡単な説明

箱をA,B,Cとし、ゲストがAを選んだとする

賞品が Aにある確率 $1/3$

「BまたはC」にある確率 $2/3$

モンティが開けるのは必ず空の箱 → 上の確率は、
箱を開けても変わらない

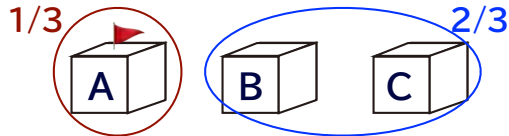


本当に正しいか？

賞品が Aにある確率 $1/3$ この確率は、
「BまたはC」にある確率 $2/3$ 箱を開けても変わらない

本当か？

「モンティは、賞品がある箱は開けない」

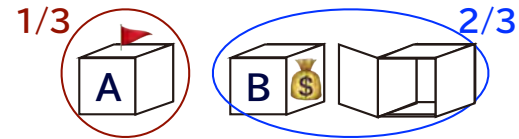


本当に正しいか？

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

賞品がBにあるなら、Cしか開けられない 他に可能性はない
賞品がCにあるなら、Bしか開けられない

「BまたはCにある確率 $2/3$ 」は、箱を開けても変わらない



確率が変化する
場合は ←

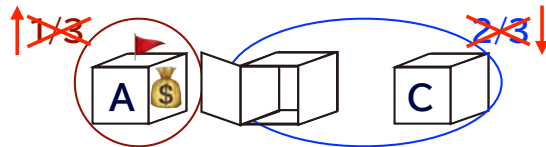
もし「裏ルール」があったら

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

賞品がAにあるときは？ モンティはB,Cのどちらを開けてもよい

もしも「賞品がAにあるときは、必ずBを開ける」という
裏ルールがあったら？

モンティがBを開けたら、賞品はAにあるという確信が高まる



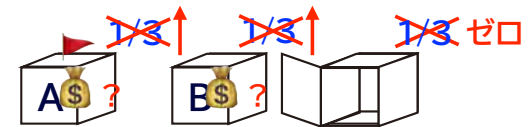
実はモンティが…

「モンティは、賞品のある箱は開けない」

モンティが、↑これを守っていなかったら？

モンティは、実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり、
今回たまたまCを開けたら空だった、としたら

賞品がA,Bにある確率が平等に大きくなる



条件付き確率で
考えてみる ←

条件付き確率を考える

モンティは、実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んでおり、
今回たまたまCを開けたら空だった、としたら

当初、Aに賞品がある確率を $P(A)$ 、
Cに賞品がない確率を $P(\bar{C})$ とすると

モンティがCを開けたあとにAに賞品がある確率は
「モンティがCを開けて空だったという条件のもとで、
Aに賞品がある条件付き確率」 $P(A|\bar{C})$

$$P(A|\bar{C}) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

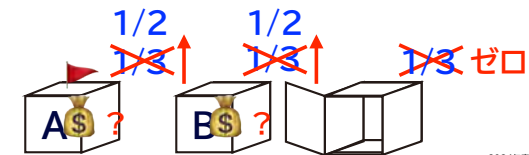
実はモンティが…

「モンティは、実はA,B,Cを同じ確率でランダムに選んだ」のならば
Aに賞品がある確率 $P(A) = \frac{1}{3}$, Cに賞品がない確率 $P(\bar{C}) = \frac{2}{3}$ なので

モンティがCを開けたあとにAに賞品がある確率は

賞品がAにあってCにない確率

$$P(A|\bar{C}) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A)}{P(\bar{C})} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$



この問題のポイントは

モンティの行動は、賞品のありかを知る手がかりになっているか？

確率とは「すべての可能性の数のうち、着目している可能性の割合」
つまり、モンティの行動が「他にどんな可能性があったか」によって
確率は変わる

それには、モンティの「心の中」が影響します。

