

2024年度春学期

統計学

第12回

分布の平均を推測する

— 区間推定



関西大学総合情報学部
浅野 晃

前回までの復習🤔

「統計的推測」とは

調べたいデータ全体を調べられるか？

日本男性全員の身長を調べられるか？

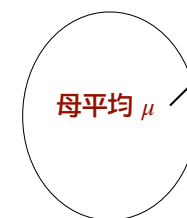
データの**一部**を調べて度数分布を推測する

いや、せめて平均や分散を推測する

統計的推測

母平均の推定

母集団
(日本男性全体)

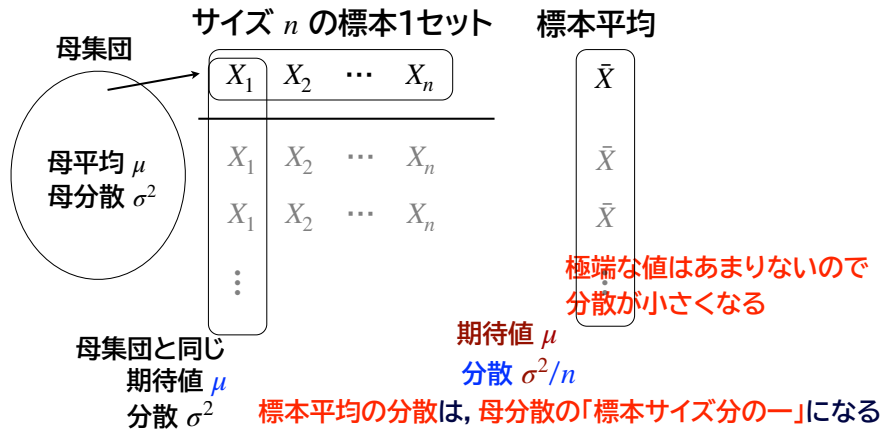


標本として数値を**いくつか**取り出して、
それらの平均 **【標本平均】**

標本平均は母平均に近い値になるか？

母平均が知りたい が、日本男性全員は調べられない

標本平均の期待値と分散は



母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均は、
「たいてい、ほぼ」母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

正規分布モデル

世の中には、[正規分布モデル]で表せるよう
な母集団分布がたくさんある

長さの測定値の分布、共通テストの成績の分布 ...

[中心極限定理]

母集団のばらつきの原因が、無数の独立な原因の和のとき、
母集団分布は概ね正規分布になる

「日本男性の身長」も。

正規分布の性質1

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう とき

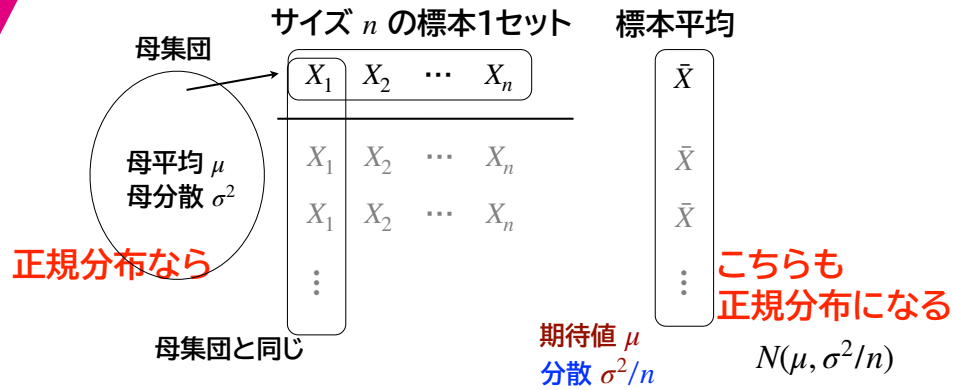
$(X - \mu)/\sigma$ は $N(0,1)$ にしたがう

「標準得点」と同じ

変換しても、
やはり正規分布になる

$N(0,1)$ を [標準正規分布] という

正規分布の性質2



区間推定 🤔

区間推定

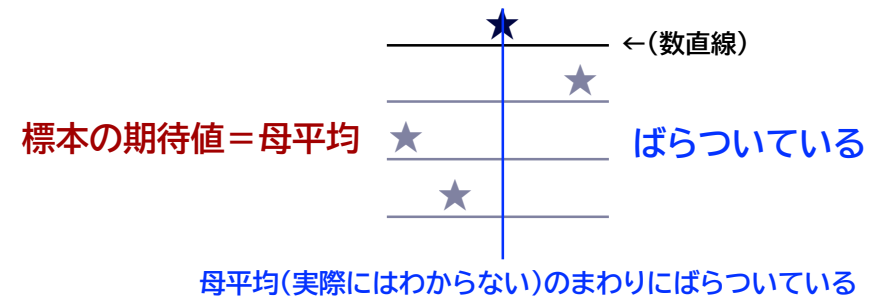
母平均を推測する。その答え方が、

母平均は、50 から 60 の間にあると推測する。

この推測が当たっている確率は 95%である。

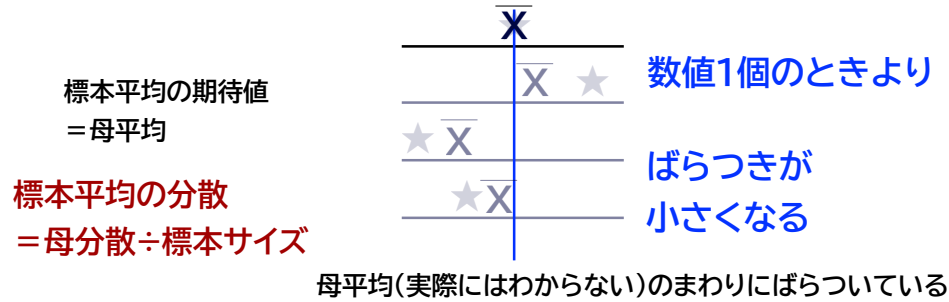
区間推定の考え方

標本として数値をひとつだけ抽出
仮に、何度も抽出したとすると



区間推定の考え方

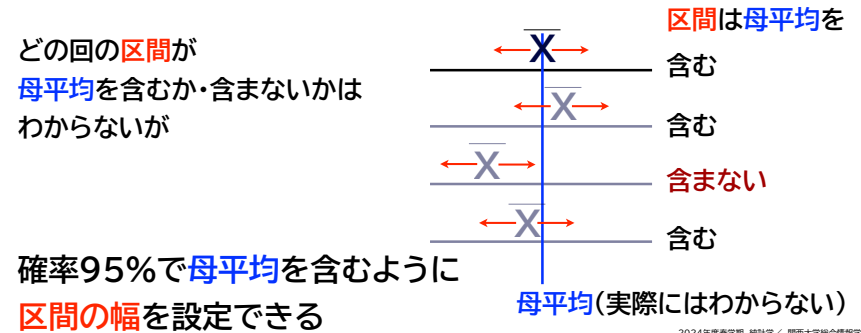
数値をいくつか抽出して**標本平均**
仮に、何度も抽出したとすると



区間推定の考え方

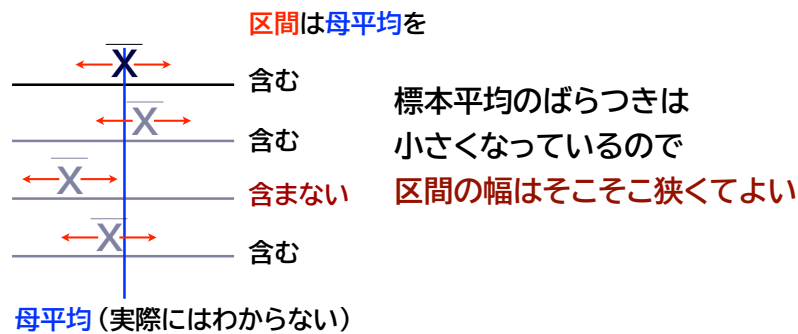
標本平均の左右に**区間**をつける

標本平均はばらついているが、前後に区間をつければ、母平均はたいていその区間に入っているようにできる

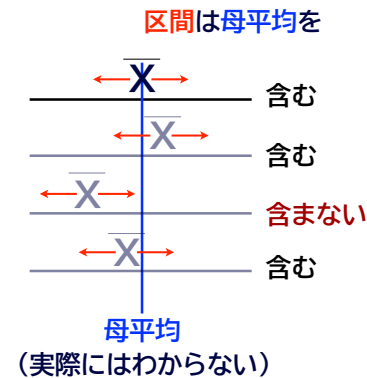


区間推定の考え方

確率95%で**母平均**を含むように**区間**を設定できる



区間推定の考え方

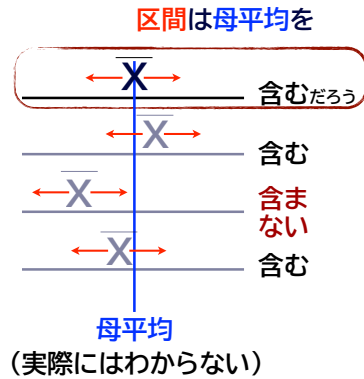


実際には、
標本平均と**区間**は1度しか計算しない

その**区間**が、**母平均**を含むかどうかは
実際にはわからない

しかし、確率95%で**母平均**を含むように
計算した**区間**だから、
その1回も含むと**信じる**

信頼区間



95%という大きな確率で
母平均を含むように設定した区間だから、
その1回でも含むと信じる

母平均の
[信頼係数]95%の
[信頼区間] という
([95%信頼区間])

「信頼」ということば

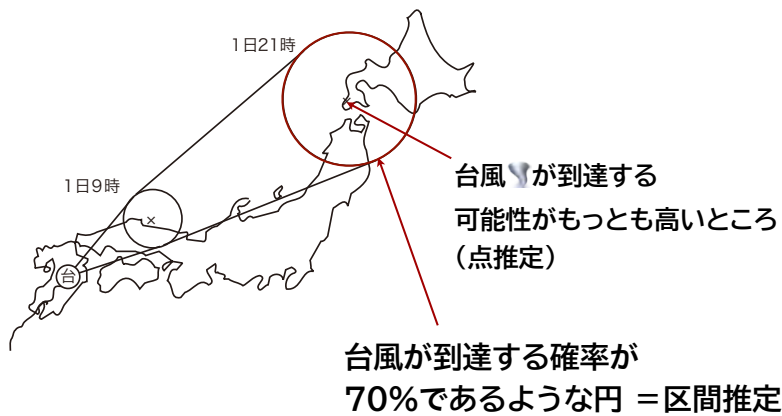
私は、予言者です。
私の予言は、確率95%で当たります💡

いまから、来年おきることを予言します。「来年は、...」

このひとつの予言が正しいかどうかはわからない

しかし、十分多くの予言をすれば95%は当たるのだから、
この予言も信じる価値はある **これが「信頼」**

台風情報と信頼区間



正規分布の場合の
信頼区間の計算🤔

正規分布の場合の区間推定

テキストの例題

ある試験の点数の分布は正規分布であるとしてます。

この試験の受験者から、10人からなる標本を無作為抽出して、この人たちの点数を平均したところ50点でした。

この試験の受験者全体の標準偏差が5点であるとわかっているとき、受験者全体の平均点の95%信頼区間を求めてください。

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

標本 X_1, X_2, \dots, X_n をとりだす
サイズ n

標本平均 \bar{X}

母平均 μ

正規分布
と仮定する

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする (説明の都合です)

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は、母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標本平均は、やはり正規分布にしたがうが、
分散が $1/n$ になる [性質2]

正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は、母集団分布と同じ確率分布にしたがう

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標本平均は、やはり正規分布にしたがうが、分散が $1/n$ になる

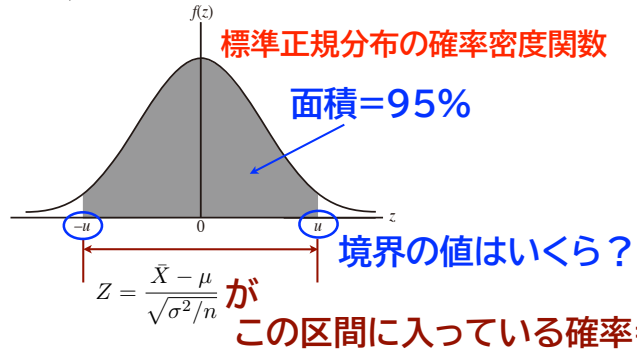
正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ [性質2]

正規分布の[性質1]により

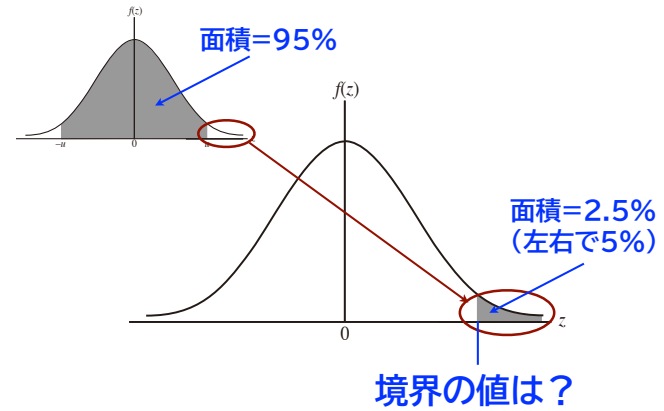
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \text{ は標準正規分布にしたがう } N(0,1)$$

正規分布の場合の区間推定

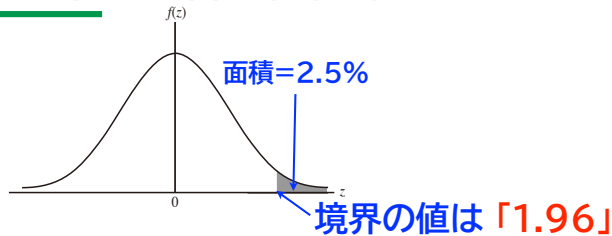
$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ は標準正規分布にしたがう



正規分布の場合の区間推定



正規分布の場合の区間推定



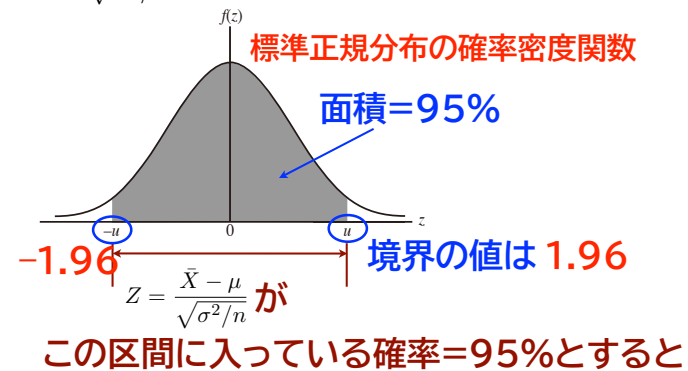
うまいぐあいに、正規分布表で

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
...										
1.9	0.028717	0.028067	0.027429	0.026803	0.026190	0.025588	0.024998	0.024419	0.023852	0.023295

1.9 0.024998

正規分布の場合の区間推定

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ は標準正規分布にしたがう



正規分布の場合の区間推定

$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$ が -1.96 と 1.96 の間に入っている確率が95%

式で書くと

$$P(-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96) = 0.95$$

$P()$ は、カッコ内のことがおきる確率

μ の式に直すと これで、 μ の信頼区間の形になる

$$P(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}) = 0.95$$

正規分布の場合の区間推定

例題では

標本平均=50 母分散=25 標本サイズ=10

$$P(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}) = 0.95$$

μ の95%信頼区間の
下限

μ の95%信頼区間の
上限

計算すると、例題の答は
「46.9以上53.1以下」 [46.9, 53.1]

信頼区間の答え方


$$P(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}) = 0.95$$

μ の95%信頼区間の下限 μ の95%信頼区間の上限

計算すると、例題の答は [46.9, 53.1]

これを

$$P(46.9 \leq \mu \leq 53.1) = 0.95$$

と書いてはいけないの? **だめです**  **なぜ?**

信頼区間の答え方

$P(46.9 \leq \mu \leq 53.1) = 0.95$ と書いてはいけないの? **だめ** 

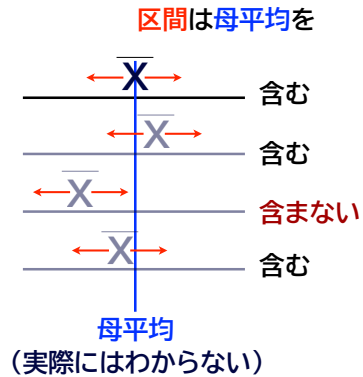
確率の式なのに、()内にランダムなものが
入っていないから

$$P(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}) = 0.95$$

こう書いたとき、 μ (母平均)はランダムではない
ランダムなのは \bar{X} (標本平均)

だから、母平均ではなく信頼区間のほうがばらつく

これを思いだしてください



実際には、
標本平均と区間は1度しか計算しない

その区間が、母平均を含むかどうかは
実際にはわからない

しかし、確率95%で母平均を含むように
計算した区間だから、
その1回も含むと信じる

区間推定についての注意

$$P(\bar{X} - 1.96\sqrt{\sigma^2/n} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\sigma^2/n}) = 0.95$$

1. 母集団の大きさは関係ない

復元抽出なら、母集団分布は標本抽出によって変化しない

2. 「95%」を選ぶ根拠はない

「確率5%なら、推測がはずれて失敗しても、まあいいか」
と知っているだけ