2024年度春学期

# 統計学

第14回
分布についての仮説を検証する
― 仮説検定(1)

関西大学総合情報学部
浅野 晃

---

## 仮説検定の考え方は，単純

---

## くじのあたり確率

「夏祭り，夜店のくじに当たりなし
　露天商の男を逮捕」
（朝日新聞大阪版2013年7月29日）

「1万円以上をつぎ込んだ男性が不審に思い、府警に相談。28日に露店を家宅捜索し、当たりがないことを確認した」



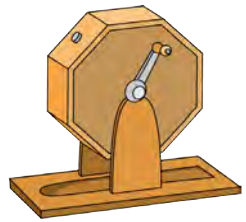
---

## 半分当たるというくじへの疑問

「半分の確率で当たる」というくじを
10回ひいても，1回も当たらなかった

運が悪いのか？

それとも
「半分の確率で当たる」と
いうのがウソか？



https://illpop.com/png_season/dec01_a07.htm

どちらが正しいともいえない。

## こう考える

警察みたいに全部のくじを調べられないなら，

仮に，本当に「確率1/2で当たる」とする

そのとき，
10回ひいて1回も当たらない確率は，
$(1/2)^{10}=1/1024$



## こう考える

本当に「確率1/2で当たる」なら，

10回ひいて1回も当たらない確率は1/1024（約0.001）

それでも「確率1/2で当たる」を信じるのは，

確率0.001でしか起きないことが，
いま目の前で起きていると信じるのと同じ



## こう考える

確率0.001でしか起きないことが，
いま目の前で起きていると信じる

そりゃちょっと無理がありませんか？

というわけで，
「確率1/2で当たる」はウソ，と考えるほうが自然

これが[仮説検定]



# 復習：t分布と区間推定

## 正規分布の場合の区間推定

**例題**

母集団
(受験者全体)

母平均 $\mu$

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとりだす
サイズ $n$

標本平均 $\bar{X}$

母平均 $\mu$ の95%信頼区間が知りたい

母分散 $\sigma^2$ がわかっているものとする(説明の都合です)



## 正規分布の場合の区間推定

**考え方**

標本は,母集団分布と同じ確率分布にしたがう
正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X}$

標本平均は,やはり正規分布にしたがうが,分散が $1/n$ になる
[性質2]
正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布の[性質1]により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$ は標準正規分布にしたがう
$N(0,1)$



## 正規分布の場合の区間推定

**例題**

母集団
(受験者全体)

母平均 $\mu$

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ をとりだす
サイズ $n$

標本平均 $\bar{X}$

母平均 $\mu$ の95%信頼区間が知りたい

母分散 $\sigma^2$ がわからないので, 不偏分散 $s^2$ で代用



## t分布

t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は

自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう
$t(n-1)$

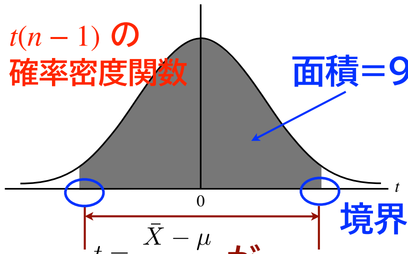
(「スチューデントのt分布」という)
発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

## t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう

$t(n-1)$

$t(n-1)$ の
確率密度関数




面積=95%

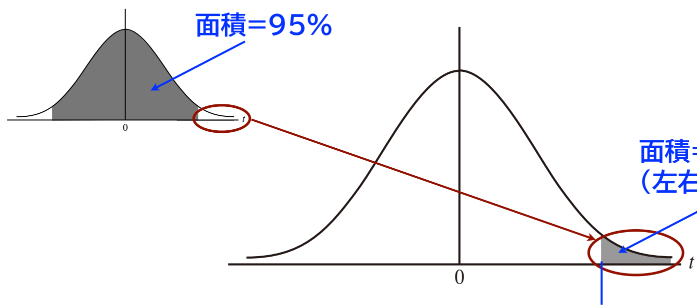
境界の値はいくら？

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%とすると



## t分布を用いた区間推定




面積=95%

面積=2.5%
（左右で5%）

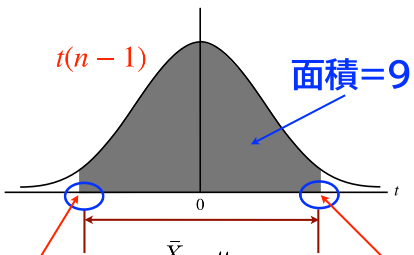
境界の値は自由度によってちがうので

$t_{0.025}(n-1)$ としておく　［上側2.5%点］



## t分布を用いた区間推定

$t(n-1)$




面積=95%

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が

この区間に入っている確率=95%

$-t_{0.025}(n-1)$

$t_{0.025}(n-1)$



## t分布を用いた区間推定

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$

の間に入っている確率が95%

式で書くと $P\left(-t_{0.025}(n-1) \leqq \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leqq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$

$\mu$ の式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leqq \mu \leqq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

# 前回のテキストの例題

$t_{0.025}(10-1) = 2.262$

標本平均=50　不偏分散=25　標本サイズ=10

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

$\mu$ の95% 信頼区間の下限

$\mu$ の95% 信頼区間の上限

で，信頼区間を求めるのは，今日の本題ではありません。



# t分布と検定

# t分布と検定：例題

10人の実験協力者に，
薬Aを与えた場合と薬Bを与えた場合とで，それぞれある検査を行うと，
その結果の数値は次の表の通りとなりました。
このとき，

薬Bは，薬Aよりも，検査の数値を高くする働きがあるといえるでしょうか？

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |



# t分布と検定：例題

問題は，
それぞれの実験協力者について，
薬Aと薬Bで数値がどう変化しているか。

各実験協力者について，
（薬Bでの数値）−（薬Aでの数値）を求める

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | −2 | −2 | 5 | 3 | −2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

# t分布と検定：例題

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | $-2$ | $-2$ | 5 | 3 | $-2$ | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bでの数値のほうが高い（＋）
薬Aでの数値のほうが高い（−）
どちらの実験協力者もいる

差の平均値について
「薬Bでの数値のほうが高い」か？



# 「本質的な差」

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薬 A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬 B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | $-2$ | $-2$ | 5 | 3 | $-2$ | 2 | 3 | 3 | 6 |

10人の実験協力者について，差の平均値は ＋2
薬Bでの数値のほうが高い

その差は，
偶然生じたものではなく
「本質的な」差なのか？

「本質的」とは？
仮に全人類が薬を飲んだとしても
薬Bでの数値のほうが高い



# 検定で考える

1.
母集団（ここでは，世界のすべての患者）については

「薬Aと薬Bでの差」の平均は0

と仮説を設定する。

つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。



# 検定で考える

1.「母集団（ここでは，世界のすべての患者）については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり，「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2.
実験協力者は，母集団から無作為抽出された，
10人からなる標本と考える。

## 検定で考える

1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
　つまり,「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる標本と考える。

**3.**
**実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。**



## 検定で考える

1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
　つまり,「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる標本と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

**4.**
**実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が,**
**「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに**
**偶然生じる確率を求める。**



## 検定で考える

1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
　つまり,「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる標本と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

4. 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が,
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

**5.その確率が小さければ,**
**「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。**
**すなわち,「本質的な差はない」という当初の仮説は誤り**
**と結論する。**



## 検定で考える

1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
　つまり,「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる標本と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

4. 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が,
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

5.その確率が小さければ,「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。
すなわち,「本質的な差はない」という当初の仮説は誤り と結論する。

くじ引き🎯の例でいえば？

本当に半分当たると考える

くじを10回引いたら全部はずれ

10回全部はずれる確率は約0.001

確率がとても小さいので,「半分当たる」は間違いと考える

**この論理を仮説検定(検定)という**

# 例題に検定で答える

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薬A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | −2 | −2 | 5 | 3 | −2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

母集団全体での「薬Aと薬Bでの差」は，平均 μ の正規分布にしたがうと考える

標本サイズを $n$（例題では10）
標本平均を $\bar{X}$（例題では，10人の実験協力者における差の平均値で，+2）
不偏分散を $s^2$（例題では，10人の実験協力者についての不偏分散で，8.89）

t統計量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は，自由度（n−1）のt分布にしたがう



# 例題に検定で答える

| 実験協力者番号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 薬A | 60 | 65 | 50 | 70 | 80 | 40 | 30 | 80 | 50 | 60 |
| 薬B | 64 | 63 | 48 | 75 | 83 | 38 | 32 | 83 | 53 | 66 |
| 差 | 4 | −2 | −2 | 5 | 3 | −2 | 2 | 3 | 3 | 6 |

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

標本サイズを $n$（例題では10）
標本平均を $\bar{X}$（例題では，10人の実験協力者における差の平均値で，+2）
不偏分散を $s^2$（例題では，10人の実験協力者についての不偏分散で，8.89）

t統計量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$ は，自由度（n−1）のt分布にしたがう

「母集団については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」という仮説

→ $\mu = 0$



# 例題に検定で答える

標本サイズを $n$（例題では10）
標本平均を $\bar{X}$（例題では，10人の実験協力者における差の平均値で，+2）
不偏分散を $S^2$（例題では，10人の実験協力者についての不偏分散で，8.89）

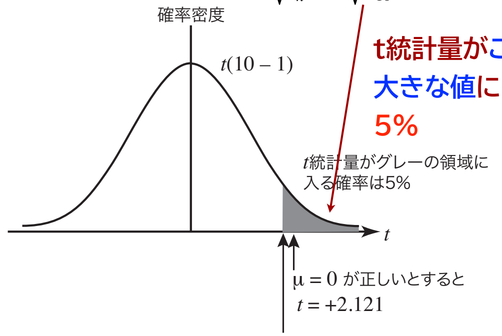
仮説より，$\mu = 0$

このとき，t統計量は $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$



# t統計量= +2.121 の意味

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
$\mu = 0$




t統計量がこんなに
大きな値になる確率は
5%

自由度（10-1）のt分布の上側5%点 $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

## 仮説は間違っている，と考える

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2-0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

そんな小さな確率でしか起きないはずのことが
起きているのは不自然

仮説が間違っていると考える

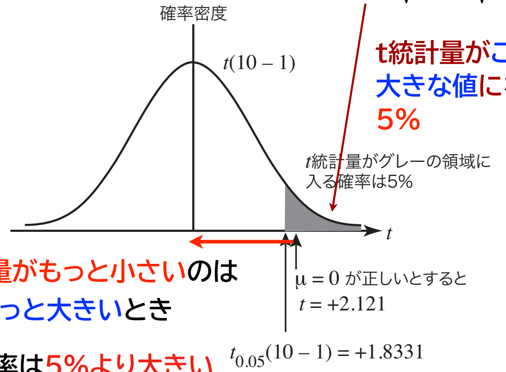
10回全部外れる確率は約0.001
そんな確率でしか起きないはずの
ことが起きているのは不自然



## では，どういう結論なら

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2-0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$




t統計量がこんなに
大きな値になる確率は
5%

t統計量がもっと小さいのは
μがもっと大きいとき

それなら起きる確率は5%より大きい



## 仮説は間違っている，と考える

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2-0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

仮説が間違っていると考える

本当は，μはもっと大きいと考える

$\mu > 0$

薬Bでの数値のほうが高い，と考える



## 検定の言葉

# 検定の言葉

[帰無仮説] $H_0$: $\mu = 0$

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$

[有意水準]

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

仮説が間違っていると考える　帰無仮説を[棄却]する

[対立仮説] $H_1$: $\mu > 0$　対立仮説を[採択]する

本当は，$\mu$はもっと大きいと考える

$\mu > 0$

偶然とは思わない

[有意]である

薬Bでの数値のほうが高い，と考える

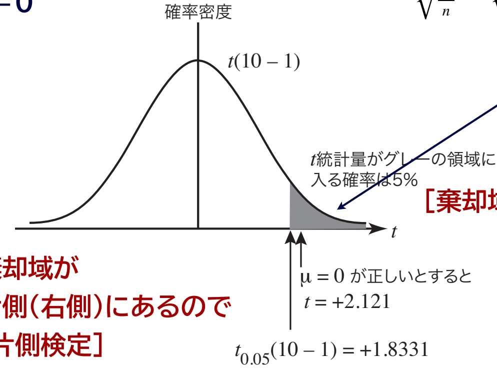


# 検定の言葉

[検定統計量]

仮説が正しいとするとき，t統計量 $t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \dfrac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$




t統計量がこんなに
大きな値になる確率は
5% [棄却域に落ちる]

[棄却域]

棄却域が
片側(右側)にあるので
[片側検定]