

2025 年度秋学期 応用数学（解析） 第1回

イントロダクション～ちょっとカッコいい数学を

このたびは、私の「応用数学（解析）」に関心をいただき、ありがとうございます。今日は、この講義で説明する各トピックの概略を説明します。

数学を学ぶこと

数学とは「問題を解くこと」なのでしょうか？

入学試験ではそうでしたが、これからは「わかる」ことが重要です。今後の仕事や生活で数学を使う場面は、試験ではありませんから、難しい問題をたちどころに解ける必要はありません。でも、数学の概念や考え方を理解していれば、現実の問題に直面したときに、「ああ、あの数学が関係しているな」というのを思い出して、資料を検索することができます。

また、数学のもっとも大きな特徴は「抽象化・一般化」です。量の変化を調べるための微分や積分は、車の速度にも、放射性元素の崩壊にも、気候の変化にも、どんな変化にも用いることができます。講義では、現実の問題がどのように抽象化されているかについても触れます。

「無限」の理解

この科目は「応用数学（解析）」ですが、この「解析学」とは、量の変化を関数で表し、その変化のしかたを研究する分野です。量の変化を取り扱うための数学が、微分と積分です。微分は「無限に短い時間」の間の変化率を求めたものですし、積分はある面積を「無限に細かく分けて」求める方法です。つまり、どちらにも「無限」の概念が用いられています。

無限とは、ただ単に「とてつもなく多い」という意味ではありません。「無限」という概念がはらむ矛盾については、「ゼノンのパラドックス」が知られているように、古代ギリシャの時代にはすでに論じられていました。「無限」が現在のように理解されるようになったのは、ニュートンやライプニッツによって微分積分学が確立されてからさらにずっと後で、今からたかだか百数十年前のことです。このトピックでは、無限とは何か、数学がそれをどうやって理解してきたかを解説します。

基本的な微分方程式

微分方程式は、「解が『数』ではなく『関数』である方程式で、関数とその微分の関係を表したもの」です。解析学は量の変化を関数で表していますから、その変化のしかたは、どんな関数なのかを知ることと理解されます。そこで、量の変化をとりまく条件を微分方程式で表し、それを解くことで、変化のしかたを知ることができます。ここでは、基本的な微分方程式の型と、その解き方を説明します。

微分方程式に関する話題

放射性原子核の崩壊では、原子の数が半分になるまでの時間は、崩壊の過程のどの時点においてもつねに一定であり、その期間を「半減期」といいます。このことは、核崩壊における条件を微分方程式で表し、それを解くことで導かれます。また、振動という物理現象は、2階線形微分方程式によって表現されます。ときには大きな力による破壊を引き起こす「共鳴」という現象も、この方程式の特別な解として理解することができます。これらのような、微分方程式が用いられる問題に関する話題を紹介します。

「その先の解析学」への導入

この講義の最後の4回は、ここまでに扱った数学の先にある「複素関数論」と「測度論」の、導入的な内容を扱います。

複素数は、実部と虚部の2つの数の組で表された数です。もともと複素数は、 $x^2 = -1$ のような、実数の範囲では解けない2次方程式の解を表すために導入されたものです。しかし、複素数にはそれにとどまらないさまざまな意味があります。ここでは、複素関数の積分と、その実関数の積分への利用法について、簡単に説明します。また、複素数の指数関数と三角関数の関係は、「波」を表す数学として非常に重要ですので、ここで紹介します。

一方、測度論とは、「ものを測る」ことの本質を考える数学の分野です。長さ、面積、体積、質量など、ものを測るにはいろいろな測り方がありますが、これらをあわせて、何かを測った量を一般的に測度 (measure) といいます。ここでは、「測るとはどういうことか」「測ることのできるものとは何か」をつきつめていった結果としてつくりあげられた「測度論」の、入り口の部分をお話しします。また、「積分」を初めて習ったときには、積分とは面積を測る方法であると習ったと思います。測ることを一般化することで、積分もより一般的な概念になります。さらに、測度論にもとづいた確率の理解についても、少しだけ触れます。

$\begin{matrix} \wedge \wedge \\ \equiv \times \times \equiv \\ () \sim \end{matrix}$ でも博士，試験はするんでしょう…？

そりゃ成績はつけないあかんからね。でも，もう入学試験とは違うんやから，「落とすために意地悪な問題」を出すことはないよ。問題に答えてもらうのは，わかっているかどうかを確認するためっていうだけやな。

$\begin{matrix} \wedge \blacklozenge \wedge \\ \equiv o- o \equiv \\ () \sim \end{matrix}$