2025年度秋学期

応用数学(解析)

第1部・「無限」の理解 ／

第2回
無限にも大小がある

関西大学総合情報学部
浅野 晃

無限とは,「モノ」ではなく「コト」🤔

「∞」という数字があるのか

「∞」という数字はありません

無限とは
「無限」という「モノ」があるのではなく
「無限であるコト」

数学では,
「コト」ではなく「モノ」のほうが扱いやすい。

「無限」を具体的な数字で扱うには？

「数えられる」無限

1, 2, 3, ⋯ ⟵ そして,「無限」

自然数とは, 数えるための数字

？
自然数の集合と同じ無限を
「数えられる無限」すなわち[可算無限]という

その「個数」は[可算基数] $\aleph_0$ (アレフゼロ)

(よく「可算無限個」という)

どうやって数えるのか

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数　$1, 2, 3, \cdots$

集合A $= \{a, b, c, \cdots\}$

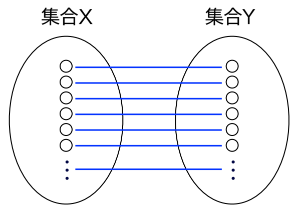
過不足なく1対1対応がつく
([全単射]が存在する)なら

この集合の[基数]([濃度])は $\aleph_0$

[可算無限集合]という

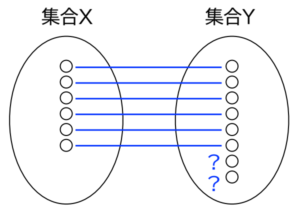
「全単射」について

集合の要素間の対応関係について



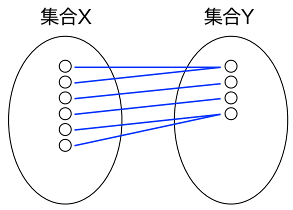
[全単射](bijection)

1対1に対応し,
X,Yどちらにも余りがない



XからYへの
[単射](injection)

1対1である
この例では
Yに余りがあるので全射ではない



XからYへの
[全射](surjection)

どちらにも余りはない
この例では
1対1ではないので単射ではない

偶数の集合の濃度は

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数　$1, 2, 3, \cdots, \ n, \cdots$

偶数　$2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

過不足なく1対1対応がつく(全単射が存在する)

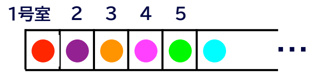
偶数の基数も $\aleph_0$
自然数と「個数」は同じ

「ホテル無限」

ヒルベルトの「ホテル無限」

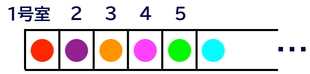
ホテル無限には，可算無限個の部屋がある

「ただいま満室です」



さらに客が一人やって来たら？

部屋にいる客全員が
隣の部屋に移れば
1号室が空く



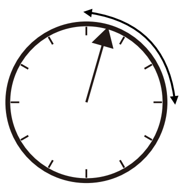
実数の基数と対角線論法 🤔

時計の針の止まる場所

連続的に針が進む時計

ボタンを押すと，その場で針が止まる

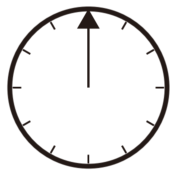
目をつぶってボタンを押したとき



12時から3時の間のどこかに止まる確率
＝円周の1/4だから，確率も1/4

時計の針の止まる場所

では「12時ちょうど」に止まる確率は？



「12時ちょうど」の幅はゼロ
→そこに止まる確率もゼロ

12時ちょうども
1時ちょうども
12時1秒ちょうども

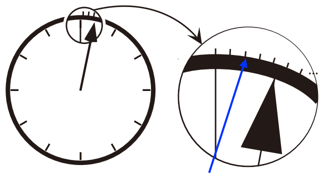
どこでも
みんな
ゼロ

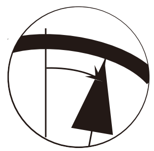
なら，「12時から3時の間のどこか」もゼロじゃないの？🤔

何がおかしいのか

各刻みに止まる確率はどれもゼロ

区間内の任意の位置
＝1つの実数で表される角度





刻みがどんなに細かくても,
順に自然数の番号がつけられる

角度を表す実数と1対1対応がつくなら,
「区間内のどの位置に止まる確率も0」

自然数と実数に一対一対応がつくか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

実数は可算無限ではない

自然数と実数に一対一対応がつくか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

いいえ。

実数を1つ, 2つ, 3つと数えることはできない

実数も自然数もその「個数」は無限だが,
実数は自然数よりも本質的に大きな無限

カントールの対角線論法

仮に, すべての実数を1番, 2番, …と番号をつけて並べられるとする

1番 0. 1 2 3 4 5 6 …
2番 0. 8 9 3 1 2 9 …
3番 0. 2 3 0 4 9 0 …
⋮

0.190… 対角線上の数字を並べた実数をつくる

0.201… 各ケタを1ずつずらす

カントールの対角線論法

すべての実数を1番, 2番, …と番号をつけて並べた表

1番 0. 1 2 3 4 5 6 …
2番 0. 8 9 3 1 2 9 …
3番 0. 2 3 0 4 9 0 …
⋮

各ケタを
1ずつずらした数 0. 2 0 1 …

この数は,
1番の数字とは1ケタめで,
2番の数字とは2ケタめで, …
n番の数字とはnケタめで
1だけずれているので,
「すべての実数を並べた」はずの表にない

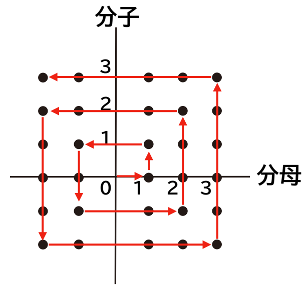
一般に
「集合Aのべき集合(Aのすべての部分集合の集合)はAよりも大きな濃度をもつ」

つまり, 「実数は可算基数 $\aleph_0$ よりも大きな濃度をもつ」

有理数の集合は可算基数をもつか
（演習問題1）

有理数と自然数の対応

有理数の集合は，可算基数をもつか



分母を横軸，
分子を縦軸とすると，
有理数は図の黒点（格子点）
※分母0の点は除く　※重複あり

すべての格子点を一筆でたどれば
自然数と一対一対応がつく 👉可算基数をもつ

有理数は可算基数をもつから

有理数の「無限」と
自然数の「無限」は　同じ無限

有理数の「無限」と
実数の「無限」は　　本質的に異なる無限

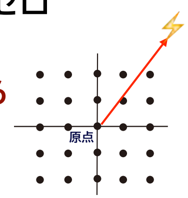
有理数の集合は「稠密」（びっしり）
実数　の集合は「連続」（べったり）

有理数は可算基数をもつから

時計⏰の針と同じ理屈で考えると

ダーツの矢（太さゼロ）を投げたら🎯

的の上で当たった点の
的の中心からの距離が有理数である確率はゼロ



原点から光線（幅ゼロ）をあちこちに発射したら

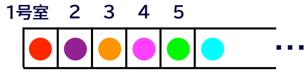
格子点に当たる確率はゼロ

ホテル無限に，無限の客
（演習問題2）

問題2

ホテル無限には，可算無限個の部屋がある

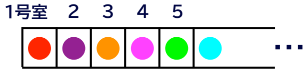
「ただいま満室です」



$\aleph_0$

さらに可算無限人の客がやって来たら？

部屋にいる客全員が
2倍の番号の部屋に移れば
奇数番の室が空く



奇数も可算無限個

今日のまとめ

「可算無限」

無限にも，大小がある

こういうことが不思議だと感じるのは，
ふだんは「無限」を，たかだか「大きな数」くらいにしか理解していないから🤔

ハレー彗星が関心をよぶのは，周期76年が「人の一生」とほぼ同じだから
それより周期の長い彗星はたくさんあるが，人は実感できない

次回は，「実数」とは何か，
実数の連続性（「べったり」並んでいること）を説明します。