

2025年度秋学期

応用数学(解析)

第1部・「無限」の理解 /

第3回

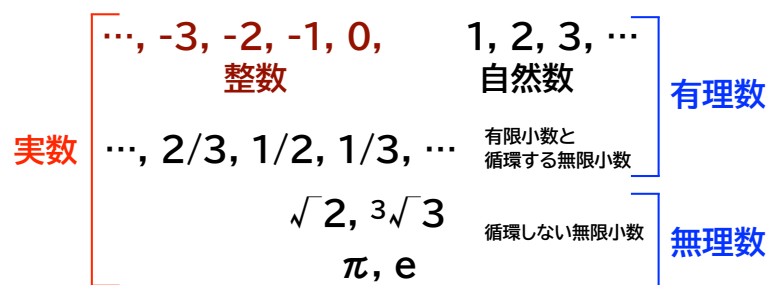
実数とは何か



関西大学総合情報学部
浅野 晃

拡張されていく「数」🤔

拡張されていく「数」



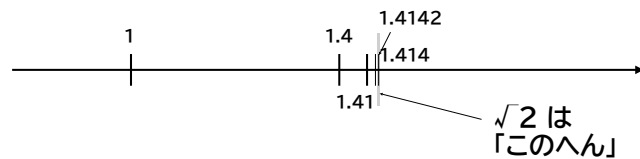
今日扱うのは「実数の連続性を示す方法」

いくつか挙げますが、どれも等価です

無限小数とカントールの公理🤔

点と区間

「循環しない無限小数」は、
数直線上の一つの「点」なのか？



$\sqrt{2}$ は本当に「点」か？ よくわからない…

点ではなく**区間**で考える

閉区間と开区間

$a < b$ のとき, a と b の間にある数の集合 → **区間**



両端を含まない **开区間** (a, b)

最小値・最大値が存在するかどうかは, 数の種類による

カントールの公理

循環しない無限小数 $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$
無限に桁数を増やすと, ひとつの実数を表せるのか？



実数は,
「入れ子」の閉区間の極限で定義する

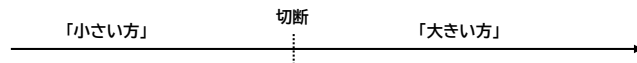
その極限が, $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$ であるとする

実数とデデキントの切断 ✂

デデキントの切断

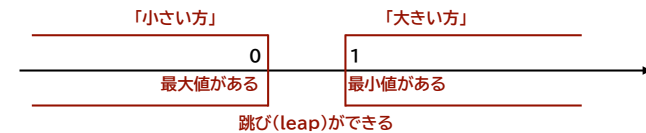
数直線をある場所で切断し、
数の集合を「大きい方」と「小さい方」に分ける

(ある集合の)すべての数を、
一方の組のどの数も
もう一方の組のどの数よりも小さくなるように、
2つの組に分ける



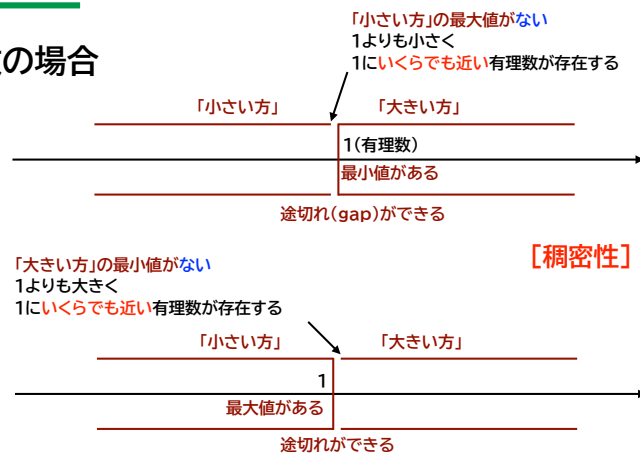
整数の切断

整数の場合



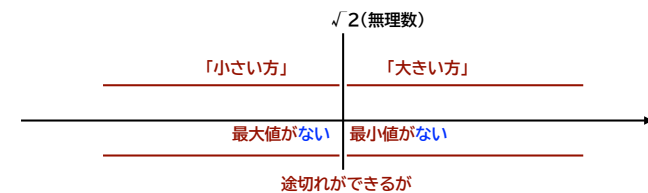
有理数の切断

有理数の場合



有理数の切断

有理数の場合こういう場合もある



$\sqrt{2}$ よりも小さく
 $\sqrt{2}$ にいくらでも近い有理数も
 $\sqrt{2}$ よりも大きく
 $\sqrt{2}$ にいくらでも近い有理数も

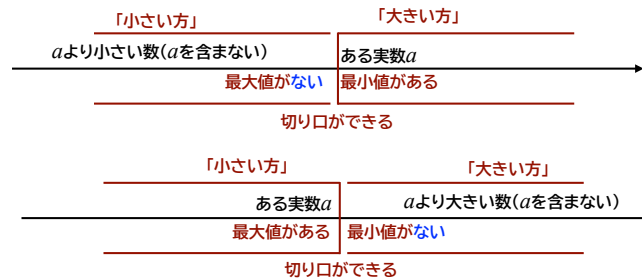
どちらも存在する

「稠密」とは、
いくらでも細かく「びっしり」と
毛の植わっているブラシのようなもの

実数の切断

実数は、必ず下のどちらかになる

稠密な上に[連続性]



実数とは、「切断の切り口」である

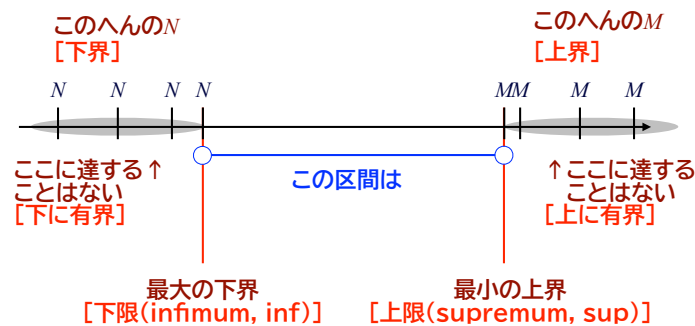
「連続」とは、「べったり」と塗り付けられた塗料のようなもの

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 13 | 29

上限と下限 ワイエルシュトラスの定理

有界, 上界・下界, 上限・下限

开区間には最大値も最小値もないが,
上にも下にも限界はある



2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 15 | 29

ワイエルシュトラスの定理

実数からなる集合が下(上)に有界ならば
必ず下限(上限)が存在する

デデキントの切断から導ける

実数からなるある集合Sが, 下に有界とすると,



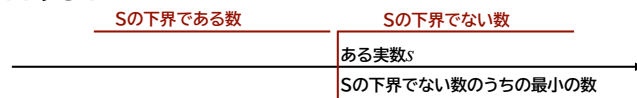
どちらかの切断を形成し, 実数sが定まる。

下の切断なら, 下限(最大の下界)が存在する。上の切断に**ならない**ことを示す

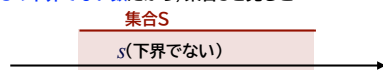
2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 16 | 29

ワイエルシュトラスの定理

こちらの切断だとすると



実数 s は、集合 S の下界でない数だから、集合 S を見ると



s より小さな数 t が、集合 S に属しているはず

s と t の間にある数 u も、集合 S に属しているはず

u は t より大きいから、 u は「集合 S の下界ではない数」である

s は u より大きい。

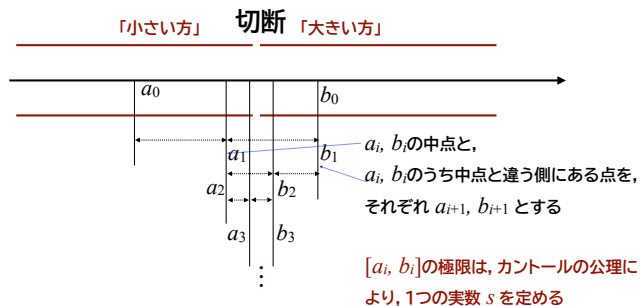
これは、「 s は 集合 S の下界ではない数のうちで最小」に矛盾 つまり、「こちらの切断ではない」

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 17 | 29

実数を定義する 各公理・定理間の関係

カントールの公理とデデキントの切断

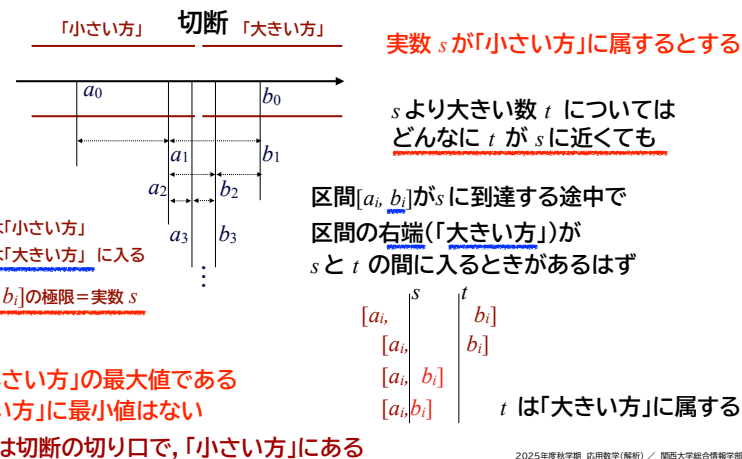
カントールの公理によって定まる実数は、
デデキントの切断によって切り口に現れる実数と同じか？



この s は、デデキントの切断による「切り口」にあるか？

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 19 | 29

カントールの公理とデデキントの切断



2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 20 | 29

実数の連続性を示すさまざまな公理

カントールの公理 実数は入れ子の閉区間の極限

デデキントの切断による公理 実数は切断の「切り口」

ワイエルシュトラスの定理

実数の集合が有界ならば, 上限か下限がある

実数の有界な単調数列は収束する (これは次回)

いずれも同値である

連続性裁判

～こんな数学, 何か役に立つの?～🤔

連続性裁判

映画の著作権

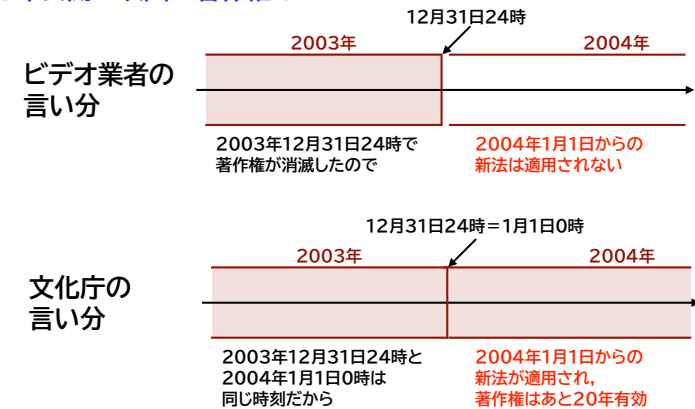
公開から50年後の年の年末まで有効

→2004年1月1日から「70年」に延長

1953年公開の映画の著作権は
50年後の2003年末で消滅?

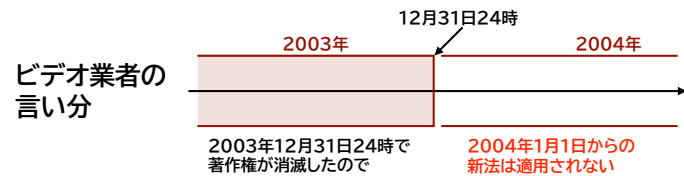
連続性裁判

1953年公開の映画の著作権は



裁判の結果は

「2003年12月31日」と「2004年1月1日」は別の日だから
「2003年12月31日24時」と「2004年1月1日0時」は別の時刻



こちらが認められた。

「時の流れは連続」

問題

問題の解説

相異なる2つの有理数の間には必ず無理数があることを証明してください。

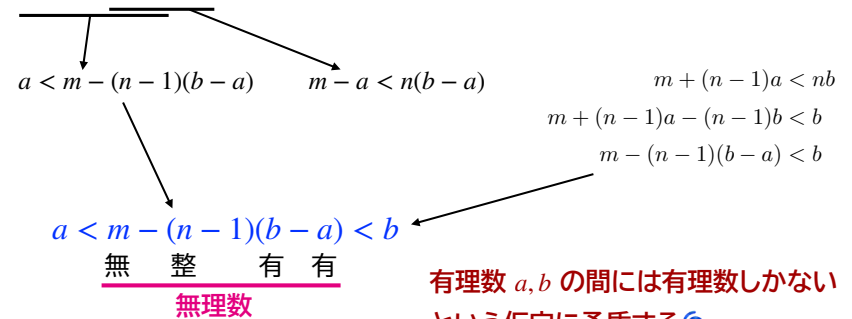
有理数 a, b の間には有理数しかないと仮定する 😞

m を無理数とすると,
 a, b は有理数なので, $\frac{m-a}{b-a}$ も無理数

$n-1 < \frac{m-a}{b-a} < n$ となる 整数 n が存在する
($\frac{m-a}{b-a}$ の整数部分が $n-1$)

問題の解説

$n-1 < \frac{m-a}{b-a} < n$ となる 整数 n が存在する



今日のまとめ

実数の「連続性」

実数の連続性を示す方法

カントールの公理

デデキントの切断による公理

ワイエルシュトラスの定理