

2025年度秋学期

応用数学(解析)

第1部・「無限」の理解 /

第4回

収束とは何か, $\varepsilon - \delta$ 論法



関西大学総合情報学部
浅野 晃

微分を習ったときの説明💡

何かごまかされている気がする🤔

微分の説明

関数 $f(x) = x^2$ の微分

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + \cancel{h}) = 2x\end{aligned}$$

h はゼロに近づいているだけで、
ゼロではないから、
分母分子を h で割る

やっぱり h はゼロ

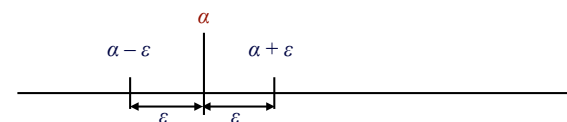
これっておかしく
ありませんか？

収束＝「限りなく近づく」ことの意味🤔

数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間
 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) を設定しても,

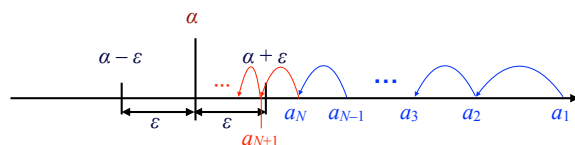


数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,
 a_n は, みなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る

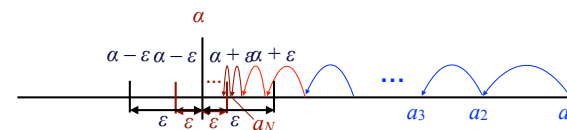


数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,
 a_n は, みなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る



ε をどんなに小さくしても そういう N がある

数列の収束の定義

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは

α のまわりにどんなに狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ を設定しても ($\varepsilon > 0$)

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については,
 a_n はみなその狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ に入る

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \quad \varepsilon - N \text{ 論法}$$

数列の発散の定義

数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散する

どんなに大きな数 G を持ってきても,

数列が十分大きな番号 N まで進めば

N 番より大きな番号 n については, a_n はみな G より大きくなる

$$\forall G, \exists N; n > N \Rightarrow a_n > G$$

収束や発散は「無限」なのか

「無限」とはひとつも言っていない

どんなに狭い区間 $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ でも

どんなに大きな数 G でも

十分大きな番号 N なら

どれも「無限」ではなく有限

ただし, 求めに応じて
好きなだけ狭く・大きくできる

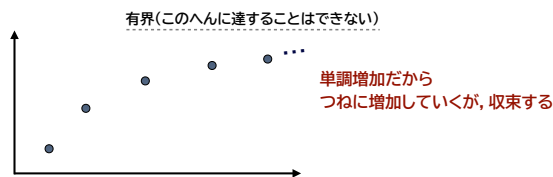
実数の連続性と収束 🤔

実数の連続性と収束

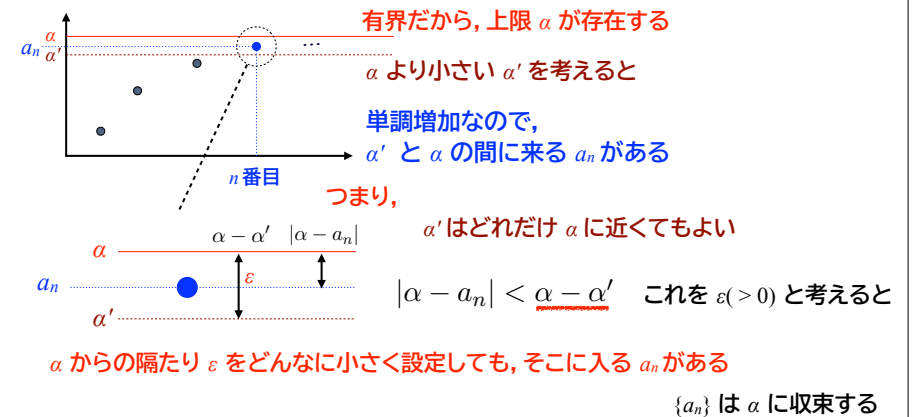
実数の連続性を述べる公理の, 4つめの表現

実数の有界な単調数列は収束する

数列 $\{a_n\}$ が「単調増加」とは, $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$
 「単調減少」とは, $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$



ワイエルシュトラスの定理から証明



数列の収束に関する例題💡

例題

$a > 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ を証明せよ。

$\frac{a^k}{k!} = C$ とおく。番号 k は, $k > 2a$ であるとする。

$n > k$ となる番号 n について,

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{n!} &= \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{n} \\ &= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \dots \times \frac{a}{k+(n-k)} \end{aligned}$$

例題

$n > k$ となる番号 n について,

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{n}$$

$$= C \times \frac{a}{k+1} \times \frac{a}{k+2} \times \cdots \times \frac{a}{k+(n-k)}$$

$k > 2a$ なので

$$\frac{a^n}{n!} < C \times \frac{a}{2a+1} \times \frac{a}{2a+2} \times \cdots \times \frac{a}{2a+(n-k)}$$

$$< C \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C \cdot 2^k}{2^n} < \frac{C \cdot 2^k}{n}$$

つまり
 $\{a^n/n!\}$ は 0 に収束する

そこで, どんな小さな $\varepsilon (> 0)$ についても, 番号 n が $n > \frac{C \cdot 2^k}{\varepsilon}$ であれば $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$

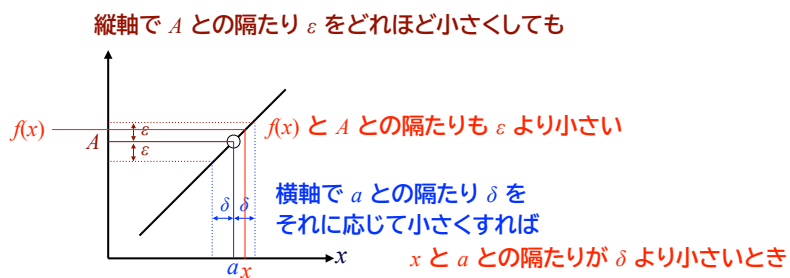
関数の極限 🤔

関数の極限

数列の収束と同じ論法を用いる

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が A であるとは



関数の極限

どんなに小さな ε を考えても ($\varepsilon > 0$)

x と a との隔たりを δ より小さくすれば

$f(x)$ と A の隔たりも ε より小さくできる

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad \varepsilon - \delta \text{ 論法}$$

ε も δ も, ただの正の数で, 0 ではないし,
0 に「無限に」近づくわけでもない

最初の微分の例

$h \rightarrow 0$ と書いてあっても, h はあくまで正の数で, 0ではない

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \quad \begin{array}{l} h \text{ はゼロに近づいているだけで,} \\ \text{ゼロではないから, 分母分子を } h \text{ で割る} \end{array} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + \cancel{h}) = 2x\end{aligned}$$

やっぱり h はゼロ ではなくて

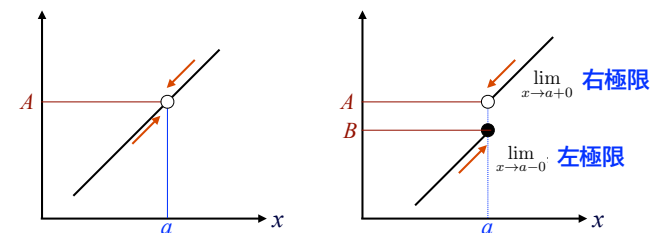
収束する先が $h=0$ を代入したときの値と同じ, というだけ

左極限と右極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が A であるとは

x が大きい方から a に近づいても, 小さい方から a に近づいても, どちらの極限も A

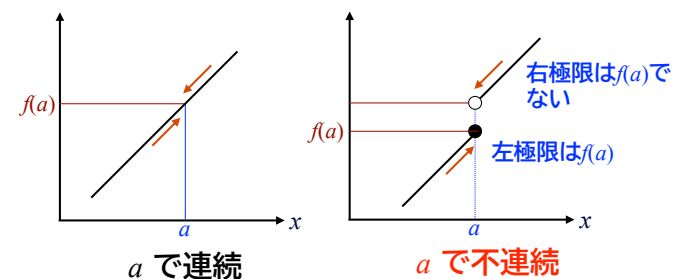


関数の「連続」と「一様連続」😓

関数の連続性

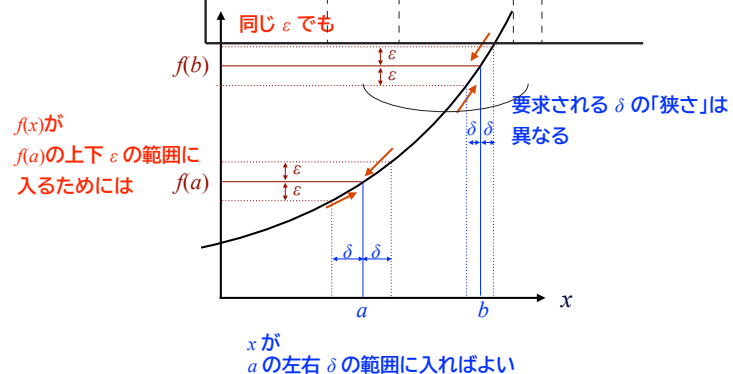
関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは

関数 $f(x)$ の $x \rightarrow a$ の極限が $f(a)$ であること

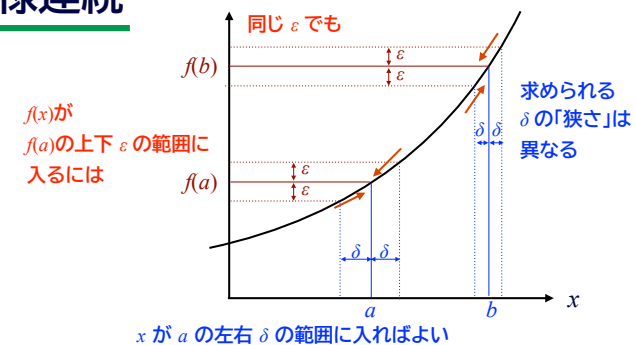


区間 I のどの点でも連続なら「区間 I で連続」

$\varepsilon - \delta$ 論法で話をすると

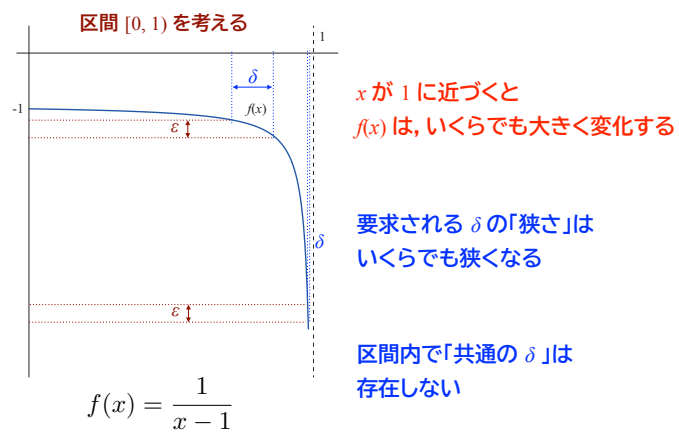


一様連続



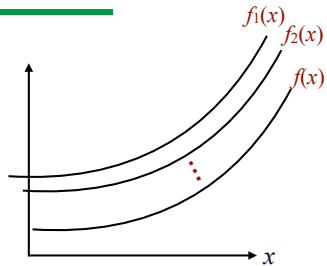
この場合は「狭い方の δ 」をどこでも用いればよい
どの点でも「共通の δ 」を用いれば連続といえるとき[一様連続]という

連続だが一様連続でない例



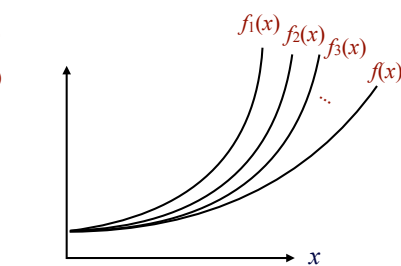
関数列の収束 🤔

関数列の収束と「一様収束」



区間内の各点で,
 $f_n(x)$ と $f(x)$ の隔たりが 0 に近づく

$f_1(x), f_2(x), \dots$ が $f(x)$ に
[各点収束] する



左のほうでは収束していくが

いくらでも右に行けば
いつまでたっても収束しない

各点収束ではあるが[一様収束]でない

今日のまとめ

「限りなく近づく」とは,
「無限」ではない

求めに応じて
好きなだけ近くできること