

前回は、変数分離形の微分方程式と、それを積分によって解く方法を説明しました。このように、常微分方程式の解を積分によって求める方法を**求積法**といいます。今回は、式変形によって変数分離形に帰着し、求積法で解ける形の方程式を紹介します。

同次形の微分方程式

関数 $x(t)$ についての**同次形**の微分方程式とは、次の形のものをいいます。

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right). \quad (1)$$

この方程式は、 $\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ ですから、 $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$ となり、

$$\begin{aligned} t \frac{du}{dt} + u &= f(u) \\ \frac{1}{f(u) - u} du &= \frac{1}{t} dt \end{aligned} \quad (2)$$

と変数分離形に変形できます。

ところで、関数 $M(x, t)$ が $M(ut, t) = t^k M(u, 1)$ となると、関数 M は k 次の**同次関数**であるといいます。関数 $x(t)$ についての微分方程式が $\frac{dx}{dt} = \frac{M(x, t)}{N(x, t)}$ と表される時、もしも M, N が同じ k 次の同次関数なら、 $x = ut$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{M(x, t)}{N(x, t)} \\ &= \frac{t^k M(u, 1)}{t^k N(u, 1)} = \frac{M(u, 1)}{N(u, 1)} = \frac{M(\frac{x}{t}, 1)}{N(\frac{x}{t}, 1)} \end{aligned} \quad (3)$$

となり、(1) 式の形になります。同次形という名前はここからきています。

例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x' = \frac{t-x}{t+x}$ の一般解を求めてください。

(解答) 右辺の分母分子を t で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}} \quad (4)$$

となりますから、この方程式は同次形です。そこで $\frac{x}{t} = u$ とおくと $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$ となり、与えられた方程式は

$$\begin{aligned} t \frac{du}{dt} + u &= \frac{1-u}{1+u} \\ \frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u} du &= \frac{1}{t} dt \\ \frac{u+1}{u^2+2u-1} du &= -\frac{1}{t} dt \end{aligned} \quad (5)$$

という変数分離形になります。ここで $\frac{d}{du}(u^2 + 2u - 1) = 2(u + 1)$ ですから、(5) 式の両辺を積分すると、 C を積分定数として

$$\frac{1}{2} \log(|u^2 + 2u - 1|) = -\log |t| + C \quad (6)$$

となります。よって、別の定数 A を使って

$$\begin{aligned} \log(|u^2 + 2u - 1|) &= \log(A|t|^{-2}) \\ t^2(u^2 + 2u - 1) &= A \end{aligned} \quad (7)$$

とあらわすことができます¹。 $u = \frac{x}{t}$ ですからこれを代入すると、この方程式の解は $x^2 + 2tx - t^2 = A$ となります。 ■

1 階線形微分方程式

関数 $x(t)$ についての 1 階微分方程式が

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \quad (8)$$

の形に書けるとき、この方程式を **1 階線形微分方程式** といいます。

この方程式は、 $p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right)$ とおくと、 $(p(t)x)'$ が

$$\begin{aligned} (p(t)x)' &= (p(t))'x + p(t)x' \\ &= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right) \right]' x + p(t)x' \\ &= p(t)P(t)x + p(t)x' \\ &= p(t) \{P(t)x + x'\} = p(t)Q(t) \end{aligned} \quad (9)$$

となることから、 C を積分定数として

$$\begin{aligned} p(t)x &= \int p(t)Q(t)dt + C \\ x &= \frac{1}{p(t)} \left(\int p(t)Q(t)dt + C \right) \end{aligned} \quad (10)$$

と解くことができます。

例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x' + x = t$ の一般解を求めてください。

(解答) この方程式は 1 階線形微分方程式で、(8) 式にあてはめると $P(t) \equiv 1$, $Q(t) = t$ です。よって $p(t) = \exp\left(\int 1dt\right) = e^{t+C_1} = e^{C_1}e^t$ で (C_1 は定数)、定数を $e^{C_1} = C_2$ と書き換えると $p(t) = C_2e^t$ となります。したがって、一般解は (10) 式から、 C_3 を定数として

$$C_2e^tx = \int C_2e^tt dt + C_3 \quad (11)$$

¹定数には適宜 $\pm$ をつけてよいので、絶対値が外れることに注意してください。

となり、定数を $\frac{C_3}{C_2} = C$ と置き換えると $e^t x = \int e^t t dt + C$ となります。そこで、部分積分を使って

$$\begin{aligned} e^t x &= \int e^t t dt + C \\ &= e^t t - \int e^t dt + C \\ &= e^t t - e^t + C \\ x &= t - 1 + C e^{-t} \end{aligned} \tag{12}$$

と求められます。■

ところで、 $n \neq 0, n \neq 1$ とするとき、関数 $x(t)$ についての

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n \tag{13}$$

の形の方程式を **Bernoulli (ベルヌーイ) の微分方程式** といいます。

この方程式は、 $u = x^{1-n}$ とおくと 1 階線形微分方程式に変換することができます。(13) 式から

$$\frac{1}{x} x' + P(t) = Q(t)x^{n-1} \tag{14}$$

となります。一方、 $u = x^{1-n}$ の両辺の対数をとると $\log u = (1-n) \log x$ で、その両辺をそれぞれ t で微分すると

$$\frac{u'}{u} = (1-n) \frac{x'}{x} \tag{15}$$

となります。(15) 式を (14) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n} \frac{u'}{u} + P(t) &= Q(t) \frac{1}{u} \\ u' + (1-n)P(t)u &= (1-n)Q(t) \end{aligned} \tag{16}$$

となって、 $u(t)$ の 1 階線形微分方程式となります。

例題

関数 $x(t)$ についての微分方程式 $x' + tx = tx^2$ が、1 階線形微分方程式で表されることを示してください。

(解答) $u = x^{-1}$ とおき、両辺の対数をとると $\log u = -\log x$ で、その両辺を t で微分すると

$$\frac{u'}{u} = -\frac{x'}{x} \tag{17}$$

となります。

一方、元の方程式の両辺を x で割ると

$$\frac{x'}{x} + t = tx \tag{18}$$

で、これに (17) 式と $u = x^{-1}$ を代入すると

$$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u} \quad (19)$$

となります。さらに両辺を $(-u)$ 倍すると $u' - tu = -t$ となって、 u についての 1 階線形微分方程式となります。

問題

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を解いて、一般解を求めてください。

1. $x' = \frac{x-t}{2t}$
2. $tx' - x = 1$
3. $x' + x = tx^2$

参考文献

水野克彦編，基礎課程 解析学，学術図書，1985. ISBN978-4-8736-11075

水田義弘，詳解演習 微分積分，サイエンス社，1998. ISBN4-7819-0891-8