

2025年度秋学期

応用数学(解析)

第2部・基本的な微分方程式 /

第6回

変数分離形の変形



関西大学総合情報学部
浅野 晃

変数分離形(復習) 🤔

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ とすると } g(x)dx = f(t)dt$$

両辺それぞれを
積分すると $\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 C は,
初期値を代入して定まり, 特殊解が得られる

今日は, 変形によって変数分離形に持ち込める方程式です

1. 同次形 🤔

同次形

一般には $\left(\frac{dx}{dt}\right) = f\left(\frac{x}{t}\right)$ x/t の式になっている

$\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ この両辺を微分 $\left(\frac{dx}{dt}\right) = t \frac{du}{dt} + u$
積の微分

よって $t \frac{du}{dt} + u = f(u)$

$\frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{t} dt$ 変数分離形になった

同次関数

関数 $M(x, t)$ が k 次の同次関数であるとは

$M(ut, t) = t^k M(u, 1)$ の形になっていること t^k をくくり出せる

微分方程式が $\frac{dx}{dt} = \frac{M(x, t)}{N(x, t)}$ の形で

M, N がどちらも k 次の同次関数なら, $x = ut$ において

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{M(x, t)}{N(x, t)} \\ &= \frac{t^k M(u, 1)}{t^k N(u, 1)} = \frac{M(u, 1)}{N(u, 1)} = \frac{M\left(\frac{x}{t}, 1\right)}{N\left(\frac{x}{t}, 1\right)} \end{aligned}$$

前ページの形になる

例題

$x' = \frac{t-x}{t+x}$ を解いて, 一般解を求めよ。

分母分子を t でわると $\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}$ 【同次形】

$\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ より $\frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u$

よって $t \frac{du}{dt} + u = \frac{1-u}{1+u}$

$\frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u} du = \frac{1}{t} dt$ t と u を分離

$\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{t} dt$

例題(続き)

$x' = \frac{t-x}{t+x}$ を解いて, 一般解を求めよ。

微分の関係になっている $\frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\frac{1}{t} dt$

ここで $u^2 + 2u - 1$ の微分が $2(u+1)$ になるから, 上の式の両辺を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(|u^2 + 2u - 1|) &= -\log|t| + C && \text{対数の和} \rightarrow \text{真数の積} \\ \log(|u^2 + 2u - 1|) &= \log(A|t|^{-2}) && \text{対数の} \odot \text{倍} \rightarrow \text{真数の} \odot \text{乗} \\ t^2(u^2 + 2u - 1) &= A \end{aligned}$$

定数は任意なので, 絶対値が外れる

$u = \frac{x}{t}$ に戻すと $x^2 + 2tx - t^2 = A$

2. 1階線形 🤔

1階線形微分方程式

一般には $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)$ の形になっているもの

$$p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right) \text{ とおくと, 一般解は } x = \frac{1}{p(t)} \left(\int p(t)Q(t)dt + C \right)$$

なぜならば

$$\begin{aligned} (p(t)x)' &= (p(t))'x + p(t)x' && \text{積の微分} \\ &= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right) \right]' x + p(t)x' \\ &= p(t)P(t)x + p(t)x' && \text{指数の合成関数の微分} \\ &= p(t) \{P(t)x + x'\} = p(t)Q(t) \end{aligned}$$

$$\text{よって, 両辺を積分して} \quad p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$$

例題

$x' + x = t$ を解いて, 一般解を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \text{ にあてはめると } P(t) \equiv 1, Q(t) = t$$

$$\text{よって } p(t) = \exp\left(\int P(t)dt\right) \text{ とすると } p(t) = \exp\left(\int 1dt\right)$$

$$\text{前ページの式から } p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C = e^{t+C_1} = e^{C_1}e^t$$

$$C_2e^tx = \int C_2e^te^tdt + C_3 = C_2e^t$$

$$\begin{aligned} \frac{C_3}{C_2} = C &\rightarrow e^tx = \int e^tdt + C \\ &\text{部分積分} \\ &= e^tt - \int e^tdt + C \\ &= e^tt - e^t + C \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad x = t - 1 + Ce^{-t}$$

2' . ベルヌーイの微分方程式 🤔

ベルヌーイの微分方程式

一般には $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ の形 ($n \neq 1$)

$u = x^{1-n}$ とおくと1階線形微分方程式に変形できる

なぜならば

$$\left(\frac{1}{x}\right)' + P(t) = Q(t)x^{n-1} \quad \log u = (1-n) \log x$$

両辺を微分する

$$\frac{u'}{u} = (1-n) \frac{x'}{x}$$

代入

$$\frac{1}{1-n} \frac{u'}{u} + P(t) = Q(t) \frac{1}{u}$$

$$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t) \quad \text{1階線形}$$

例題

$x' + tx = tx^2$ が1階線形微分方程式で表せることを示せ。

$u = x^{-1}$ とおく

両辺の対数をとると $\log u = -\log x$

両辺を t で微分すると $\frac{u'}{u} = -\frac{x'}{x}$

両辺を x で割ると $\frac{x'}{x} + t = tx$

$$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u} \xrightarrow{-u \text{ 倍}} u' - tu = -t \quad \text{1階線形}$$

演習問題の解説🤖

演習問題(1)

$x' = \frac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

与式の右辺の分母分子を t で割ると, $x' = \frac{\frac{x}{t} - 1}{2}$ となるので, 同次形の微分方程式

$$\frac{x}{t} = u \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = \frac{u-1}{2}$$

$$x = ut \text{ なので } \frac{dx}{dt} = t \frac{du}{dt} + u \rightarrow t \frac{du}{dt} + u = \frac{u-1}{2}$$

演習問題(1)(続き)

$x' = \frac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$$t \frac{du}{dt} + u = \frac{u-1}{2} \text{ より } t \frac{du}{dt} = -\frac{u+1}{2} \text{ なので}$$

$$\frac{du}{u+1} = -\frac{dt}{2t} \text{ と変数分離できる}$$

$$\text{両辺を積分すると } \int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t}$$

演習問題(1)(続き)

$x' = \frac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$$\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \text{ より}$$

$$\log |u+1| = -\frac{1}{2} \log |t| + C \text{ (C は定数)}$$

$$\begin{aligned} \log |t|^{-\frac{1}{2}} \text{ と表せる} \quad \log e^C \text{ と表せる} \quad u+1 = \pm e^C |t|^{-\frac{1}{2}} \\ \pm e^C = A \text{ とおくと } u+1 = A |t|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

演習問題(1)(続き)

$x' = \frac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$$u+1 = A |t|^{-\frac{1}{2}} \text{ より } u = -1 + A \frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

$$u = \frac{x}{t} \text{ とおいていたので, これを代入すると } \frac{x}{t} = -1 + A \frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

$$\text{すなわち, 一般解は } x = -t + A\sqrt{|t|}$$

演習問題(2)

$tx' - x = 1$ の一般解を求めよ

$$\text{与式より } x' - \frac{x}{t} = \frac{1}{t}$$

1階線形方程式の一般形 $x' + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると $P(t) = -\frac{1}{t}, Q(t) = \frac{1}{t}$

$$p(t) = \exp \int P(t) dt \text{ とおくと, } p(t) = \exp \left(-\int \frac{1}{t} dt \right)$$

$$= \exp(-\log t + C_1)$$

$$= \exp(\log t^{-1}) + C_1$$

$$= \exp(\log t^{-1}) \exp(C_1)$$

$$= C_2 \frac{1}{t} \quad (C_1, C_2 \text{ は定数})$$

演習問題(2)(続き)

$tx' - x = 1$ の一般解を求めよ

$p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$ となることから (C は定数) $Q(t) = \frac{1}{t}$ より

$$C_2 \frac{1}{t} x = \int C_2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} dt + C_3$$

$$\frac{1}{t} x = \int \frac{1}{t^2} dt + C_4 \quad (C_3, C_4, C \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{t} x = -\frac{1}{t} + C$$

$$x = -1 + Ct \quad \text{すなわち, 一般解は } x = -1 + Ct$$

今日のまとめ

同次形
1階線形
ベルヌーイ