2025年度秋学期

応用数学(解析)

第2部・基本的な微分方程式 ／

第7回
2階線形微分方程式(1)

関西大学総合情報学部
浅野 晃

2階線形微分方程式とは🤔

2階線形微分方程式

一般には $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$

ここが恒等的に0なのが[斉次]
そうではないのが[非斉次]

一番簡単なのは $x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次方程式

とりあえず，$x \equiv 0$ は解[自明解]

それ以外には？

2階線形微分方程式の解

とりあえず $x'' + ax' + bx = 0$ に $x(t) = e^{\lambda t}$ を代入すると

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0$$

$$\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right) e^{\lambda t} = 0$$

ここが 0 になるような λ については
$x = e^{\lambda t}$ は解，その定数倍も解

λ の2次方程式だから，みたす λ はたいてい2つ λ_1, λ_2

一般解は $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ $x \equiv 0$ を含む

おわり😪

こんなんでいいのか？🌀

本当に一般解であるためには

$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ が本当に一般解であることは，
以下の2項目が正しいことと同じ

1. 解が一意

   初期値 $\underbrace{x(t_0), x'(t_0)}_{\text{初期値はこの2つ}}$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

   1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
   一般解は $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ で表される

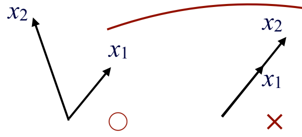
本当に一般解であるためには

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

   1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
   一般解は $C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ で表される

2つの関数が1次独立とは

$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは，$C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



解全体は
2次元ベクトル空間をなす

本当に一般解であるためには

1. 解が一意
2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

さっきの例では

$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ は $\lambda_1 \neq \lambda_2$ なら1次独立

一般解は $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ だけで，他にはない

一般の斉次形 n 階線形微分方程式
（定数係数でない場合も含む）についてなりたつ

定数係数の場合に，証明してみる

行列で表現する

$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ を， $x_1 = x, x_2 = x'$ とおいて

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -Q(t)x_1 - P(t)x_2 + R(t) \end{aligned}$$ と表す

行列で $$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(t) & -P(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

1階線形微分方程式の形になる
何階線形微分方程式でも，この形にできる

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

特異解と解の一意性

初期値がひとつ定まったときに，解がひとつだけに決まることを，
解が一意（unique）であるという

一意性の十分条件のひとつ「リプシッツ条件」

微分方程式が $x'(t) = f(t, x)$ のとき，初期値のまわりでどんな x_1, x_2 についても

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqq L|x_1 - x_2|$$

となる定数 L があるなら，その初期値について一意

x のわずかな変化について，
f がいくらでも大きく変化する，ということはない

条件1の証明の概略

1. 解が一意

初期値 $x(t_0), x'(t_0)$ を定めると，特殊解はひとつに定まる

リプシッツ条件をつかう

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の右辺について，関数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を考えると

$\|\,(A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)) - (A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t))\,\| = \|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\|$ であり，

$\|A(t)\boldsymbol{x} - A(t)\boldsymbol{y}\| \leqq \|A(t)\|\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ となるようなノルムが存在する

ユークリッドノルムならそうなる

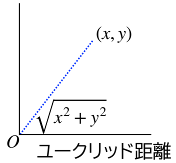
ノルムが連続なら，任意の有界閉区間で上限が存在する

リプシッツ条件が成り立ち，一意

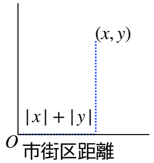
ところで，「距離」について

「ノルム」は，「距離」を一般的にしたもの

2点 x, y の間の「距離」 $d(x, y)$ とは？



ユークリッド距離
(L^2 ノルム)



市街区距離
(L^1 ノルム)

任意の x, y について，
以下の性質(距離の公理)をもつものをいう

1. $d(x, y) \geqq 0$ 　距離は正またはゼロ
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 　「距離ゼロ」と「同一点」は同じ意味
3. $d(x, y) = d(y, x)$ 　距離はどちらから測っても同じ
4. $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ 　回り道をすると距離は同じか長い(三角不等式)

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

1次独立な特殊解 $x_1(t), x_2(t)$ が得られれば，
一般解は $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ で表される

斉次形の場合を考える $x' = A(t)x$ 　テキストでは n 階の場合を示しているが，ここでは2階の場合を示す

まず，

一般解を $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $\boldsymbol{x}(t_0) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ の形で表せる

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ は，2次元の基本ベクトル

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ **の特殊解を，2つ考える**

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたすもの $\xi_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたすもの $\xi_2(t)$

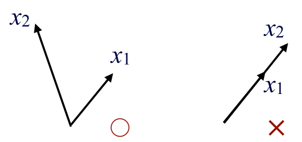
$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$
は，2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\xi_1(t), \xi_2(t)$ は，1次独立。本当？

2つの関数が1次独立とは(再掲)

2つの関数が1次独立とは

$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) = 0$ がどんな t についても
なりたつのは, $C_1 = C_2 = 0$ のときだけ



条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ の特殊解を, 2つ考える

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたすもの $\boldsymbol{\xi}_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたすもの $\boldsymbol{\xi}_2(t)$

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0), \boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$
は, 2次元の基本ベクトル

この特殊解 $\boldsymbol{\xi}_1(t), \boldsymbol{\xi}_2(t)$ は, 1次独立である 👌

$\because$ $c_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + c_2\boldsymbol{\xi}_2(t) = \boldsymbol{0}$ が任意の t についてなりたつとする

$t = t_0$ のときも当然なりたつ

$c_1\boldsymbol{\xi}_1(t_0) + c_2\boldsymbol{\xi}_2(t_0) = \boldsymbol{0}$

$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}$ ← これがなりたつのは $c_1 = c_2 = 0$ に限る

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は1次独立だから

条件2の証明の概略

2. 1次独立な特殊解の1次結合で一般解が表せる

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_1$ をみたす $\boldsymbol{\xi}_1(t)$

初期値 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{e}_2$ をみたす $\boldsymbol{\xi}_2(t)$

一般解を $\boldsymbol{x}(t)$ とするとき

$t = t_0$ のときの初期値は $\boldsymbol{x}(t_0) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ の形で表せる

特殊解の1次結合 $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)$ を考えると

$t = t_0$ のとき $x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$

- 一般解で表された $\boldsymbol{x}(t)$
- 特殊解の1次結合 $x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)$

どちらも同じ初期値をもつ
一意だから, それらは同じ解である

$$\boldsymbol{x}(t) = x_1\boldsymbol{\xi}_1(t) + x_2\boldsymbol{\xi}_2(t)$$

定数係数の 斉次形2階線形微分方程式を解く💡

2階線形微分方程式を解く

$x'' + ax' + bx = 0$ 定数係数の斉次形2階線形微分方程式

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ をみたす λ について $x = e^{\lambda t}$ は解

特性方程式という

特性方程式の解の形によって，3パターン

異なる2つの実数解の場合
異なる2つの虚数解の場合
重解の場合

実数解が2つの場合

特性方程式の異なる2つの実数解 λ_1, λ_2

微分方程式の1次独立な解 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$

一般解は $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

（つまり，最初のとおり）

虚数解が2つの場合

一般解は $x(t) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$

さらに計算すると

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t} \\
&= e^{\alpha t}\left(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t}\right) \\
&= e^{\alpha t}\left(C_1(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + C_2(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))\right) \\
&= e^{\alpha t}\left((C_1 + C_2)\cos(\beta t) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta t)\right)
\end{aligned}
$$

なぜ三角関数になるのかは，次のスライドで

定数を置き直して，一般解は

$x(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right)$ 振動を表している これは先で

(ところで)複素数の指数関数

実数の指数関数のテイラー展開 $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

複素数の指数関数は，テイラー展開で定義する

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

すると

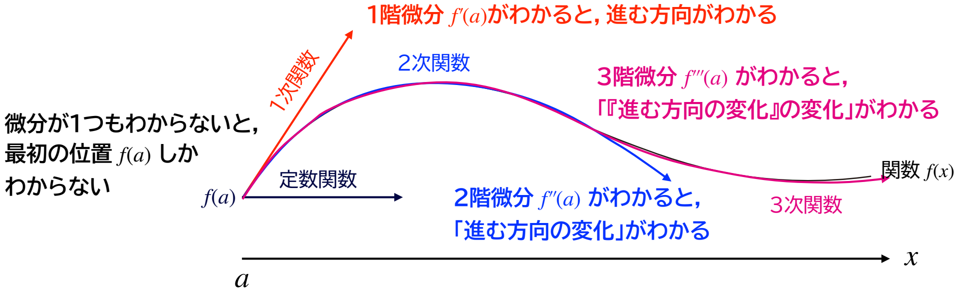
$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\
&= \underbrace{(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots)}_{\cos\theta\text{ のテイラー展開}} + i\underbrace{(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots)}_{\sin\theta\text{ のテイラー展開}}
\end{aligned}
$$

※本当は，級数をこんなふうに分けるのはいつでもできるわけではありません

よって $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\theta = \pi$ のとき $e^{i\pi} + 1 = 0$［オイラーの等式］

(ところで)テイラー展開について

テイラー展開 $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$



$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a), \ldots$ がすべてわかるなら，関数 $f(x)$ の「行く末」はすべてわかる

重解の場合

ふつうにやると，微分方程式の解は $C_1e^{\lambda_1 t}$ しか出て来ない

これと1次独立なもうひとつの解は $te^{\lambda_1 t}$

確かめるため，解を微分して，微分方程式に代入してみる

$$(te^{\lambda_1 t})' = \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t}$$

$$(te^{\lambda_1 t})'' = \lambda_1(\lambda_1 t + 1)e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t}$$

微分方程式の左辺に代入すると

$$(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 te^{\lambda_1 t} + bte^{\lambda_1 t}$$

$$= \{\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b\}te^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a)e^{\lambda_1 t}$$

λ_1は特性方程式の解
だから0

特性方程式の
解と係数の関係により0

つまり，$te^{\lambda_1 t}$ も解

一般解は

$C_1e^{\lambda_1 t} + C_2te^{\lambda_1 t}$

見つけ方はテキストで（定数変化法）

例題🤔

例題

$x'' - 5x' + 6x = 0$ **を解いて，**

初期値 $x(0) = 1,\ x'(0) = 0$ **での特殊解を求めよ。**

特性方程式は $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ その解は $\lambda = 2, 3$

異なる2つの実数解なので，微分方程式の一般解は

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

初期条件から

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$x'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$C_1 = 3, C_2 = -2$$

よって，求める特殊解は

$$x(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}$$

今日のまとめ

定数係数・斉次形の
2階線形微分方程式 $x'' + ax' + bx = 0$

次回は非斉次形
(右辺が0でない)をやります