

2025年度秋学期

# 応用数学(解析)

第4部・「その先の解析学」への導入 /

第12回

複素関数論ダイジェスト(1)

複素関数・正則関数



関西大学総合情報学部  
浅野 晃

## 応用数学(解析)は

ここから先の”「その先の解析学」への導入”は,  
「ちょっとカッコいい数学」への入口です

複素関数論ダイジェスト(2回)

測度論ダイジェスト(2回)

本来は, それぞれ半期15回をかけて学ぶ科目です🎓

ここでは, 「雰囲気🌬」を説明します

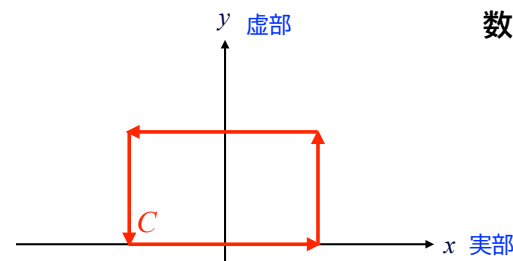
2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 2 / 28

「複素関数」で  
いったい何をやろうというのか🤔

## こんな積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad \text{まっとうには求められません。}$$

そこで  
数直線を 複素平面に拡張  $z = x + yi$



こういう周C上で  
 $\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz$  を計算すると  
上の積分も求まる

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 4 / 28

## 複素数と複素関数 🤔

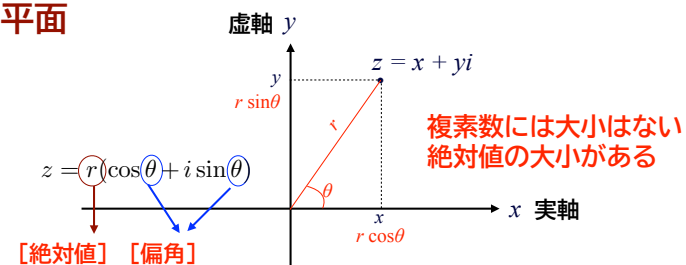
## 複素数と複素関数

複素数  $z = x + yi$  ( $x, y$  は実数,  $i = \sqrt{-1}$ )

実部 虚部

複素数で定義された関数が[複素関数]

### 複素平面



2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 6 | 28

## 複素数の指数関数(ふたたび)

実数の指数関数のテイラー展開  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

複素数の指数関数は, テイラー展開で定義する

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

すると  $e^{i\theta} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$  ※本当は, 級数をこんなふうに分けるのはいつでもできるわけではありません🙄

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$   $\cos \theta$  のテイラー展開  $\sin \theta$  のテイラー展開

よって  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$   $\theta = \pi$  のとき  $e^{i\pi} + 1 = 0$  [オイラーの等式]

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  は  $z = re^{i\theta}$  と書ける

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 7 | 28

## 複素関数と微分 正則関数

## 複素関数の微分

複素関数の微分の定義は、実関数と同様

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

ただし、変数は複素平面上にあるのが、大きな違い

複素関数  $f(z)$  が、複素平面の領域  $D$  で[正則]

→  $f(z)$  が  $D$  内のどこでも微分可能

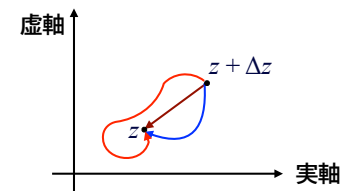
複素平面上で微分可能とは？

## 複素平面上での「微分可能」

複素関数  $f(z)$  が、複素平面上のある点  $z$  で微分可能とは

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

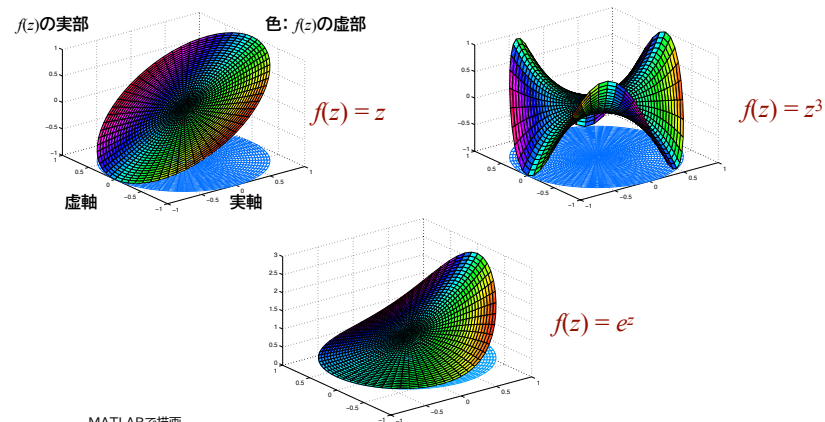
複素平面上で  $z + \Delta z$  が  $z$  にどのように近づいても、極限值はひとつに定まる



どのように近づいても、極限值は同じ

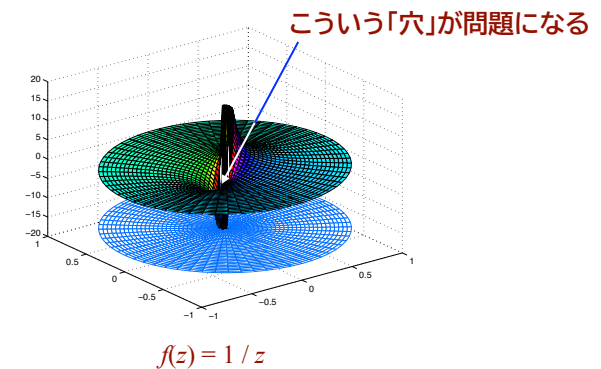
正則関数は、「折り目のないぐにゃぐにゃの板」

## 正則関数を図示すると



MATLABで描画  
参考: <http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html>

## 正則でない例



MATLABで描画  
参考: <http://jp.mathworks.com/help/matlab/examples/functions-of-complex-variables.html>

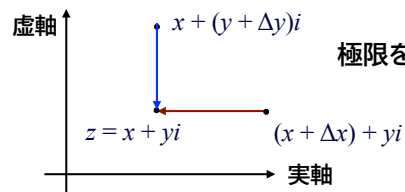
## コーシー・リーマンの関係式

複素関数  $f(z)$  が正則である必要十分条件は

$z = x + yi$  とするとき

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  と表せるなら

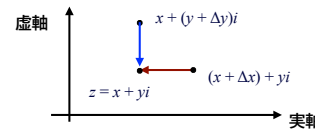
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ かつ} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$



極限をとるときにどのように近づいてもよいので

この2通りを考える

## コーシー・リーマンの関係式



この2通りの近づき方で極限值は等しいので  $f'(z)$  を2通りの近づき方で表す

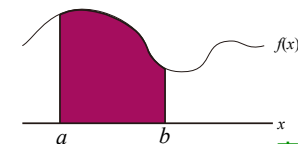
$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{((x + \Delta x) + yi) - (x + yi)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{(x + (y + \Delta y)i) - (x + yi)} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

これらが実部・虚部とも等しい

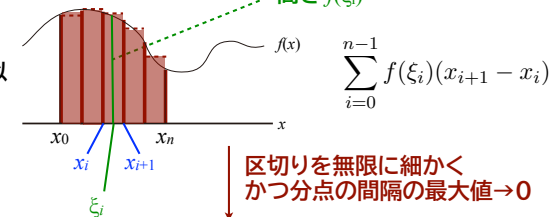
## 複素関数の積分

## 実関数の積分

この面積を求めたい



長方形で近似

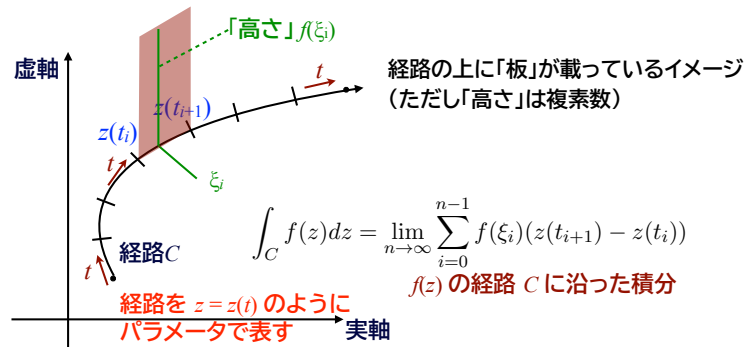


区切りを無限に細かく  
かつ分点の間隔の最大値  $\rightarrow 0$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \quad \text{実関数の積分}$$

## 複素関数の積分

積分区間だけでなく複素平面のどこを**経路**で積分するかが重要



## 正則関数と積分

複素関数  $f(z)$  が、領域  $D$  での正則関数  $F(z)$  の微分なら

$$F'(z) = f(z)$$

経路  $C$  が両端  $a, b$  を含めてすべて  $D$  内にあれば

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a) \quad \text{積分は経路に依存しない}$$

## 正則関数と積分

複素関数  $f(z)$  が、領域  $D$  での正則関数  $F(z)$  の微分なら

経路  $C$  が両端  $a, b$  を含めてすべて  $D$  内にあれば

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a) \quad \text{積分は経路に依存しない}$$

経路  $C$  を  $z = z(t)$  で表す 両端は  $z(0) = a, z(1) = b$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_0^1 f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \quad (\text{置換積分}) \\ &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dz} \frac{dz(t)}{dt} dt \quad (\text{合成関数の微分}) \\ &= \int_0^1 \frac{dF(z(t))}{dt} dt \\ &= F(z(1)) - F(z(0)) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

## 閉曲線に沿った積分

さっきの定理

複素関数  $f(z)$  が、領域  $D$  での正則関数  $F(z)$  の微分なら

$$F'(z) = f(z)$$

経路  $C$  が両端  $a, b$  を含めてすべて  $D$  内にあれば

$$\int_C f(z) dz = F(b) - F(a) \quad \text{積分は経路に依存しない}$$

ということは、

経路  $C$  が単純閉曲線なら、始点も終点も同じだから

$$\int_C f(z) dz = 0$$

## コーシーの積分定理

閉曲線に沿った積分

複素関数  $f(z)$  が、領域  $D$  での正則関数  $F(z)$  の微分で  $F'(z) = f(z)$

経路  $C$  が、 $D$  内にある単純閉曲線ならば  $\int_C f(z) dz = 0$

実は 複素関数  $f(z)$  が、領域  $D$  での正則関数で  
経路  $C$  が、 $D$  内にある単純閉曲線ならば

注：  
「領域内で正則」であって、  
「経路上で正則」ではない

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad \text{【コーシーの積分定理】}$$

示唆しているのは 正則関数の微分は正則関数  
正則関数は何度でも微分できる  
(証明の概略に、次回で少し触れます)

$\oint_C f(z) dz$   
閉曲線上の積分を表す

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 21 | 28

## コーシーの積分定理

コーシーの積分定理 複素関数  $f(z)$  が、領域  $D$  での正則関数で  
経路  $C$  が、 $D$  内にある閉曲線ならば  $\int_C f(z) dz = 0$

証明は、グリーンの定理で

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_{D'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

線積分と面積分を交換

2次元関数

閉曲線  $C$  上での(線)積分      閉曲線  $C$  に囲まれた領域  $D'$  内での(面)積分

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  として

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C \{u(x, y) + iv(x, y)\} (dx + i dy) \\ &= \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \\ &= \iint_{D'} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{D'} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

正則関数なので、コーシー・リーマンの関係式よりどちらもゼロ

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 22 | 28

## 問題③

## 問題(1)

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  という関係をつかって、  
 $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  を指数関数で表してください。

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta \text{ より}$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \text{ だから, } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \text{ だから, } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

2025年度秋学期 応用数学(解析) / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 24 | 28

## 問題(2)

**sin の加法定理**  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  を  
三角関数と指数関数の関係を使って導いてください。

$\sin x \cos y + \cos x \sin y$  を指数関数で表すと

$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} [(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})]\end{aligned}$$

## 問題(2)

$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\ &= \frac{1}{4i} [(e^{ix} - e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy}) + (e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} - e^{-iy})]\end{aligned}$$

右辺を展開して整理すると

$$\begin{aligned}\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \frac{1}{4i} \left[ \left\{ (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) + (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}) \right\} + \right. \\ &\quad \left. \left\{ (e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}) - (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}) \right\} \right] \\ &= \frac{1}{4i} [2(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)})] \\ &= \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} \\ &= \sin(x+y)\end{aligned}$$

## 今日のまとめ

### 複素関数

複素数の指数関数

複素関数の微分→「正則関数」

複素関数の積分(経路に沿った積分)

### コーシーの積分定理

領域内で正則な関数を,

領域内の閉曲線に沿って積分すると0

**正則でない点を囲んで積分したら？**

## 次回に向けて

**正則でない点を囲んで積分したら？**

