

2025年度秋学期

画像情報処理

第1部・画像のサンプリングと周波数 /

第4回

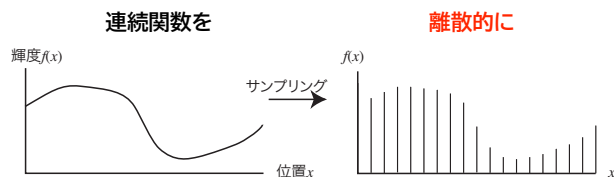
フーリエ変換とサンプリング定理



関西大学総合情報学部
浅野 晃

サンプリングとサンプリング定理 🤔

サンプリングとサンプリング定理



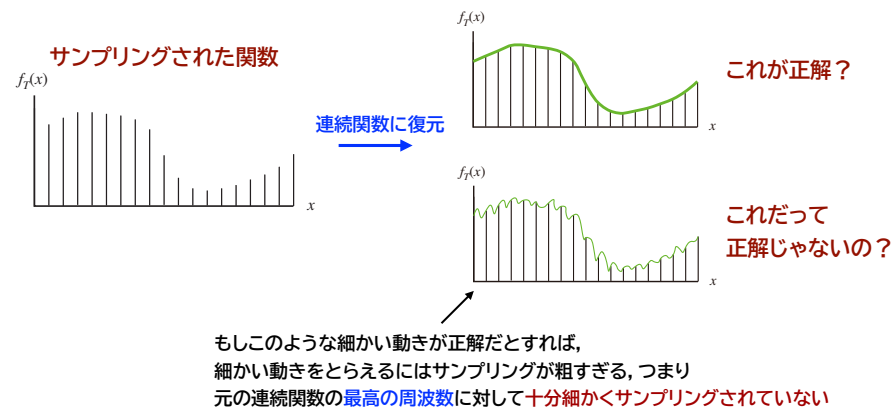
サンプリング定理

ある程度細かい間隔でサンプリングすれば, もとの連続関数に戻せる

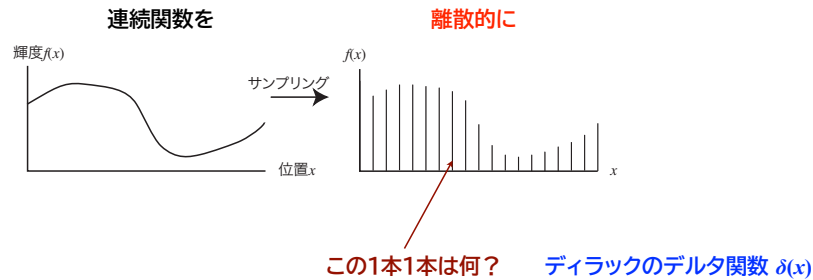
どのくらい細くしなければならないかは,
もとの関数に含まれる最高の周波数による

「細かい」関数は
細かくサンプリング

サンプリング定理・直観的には



サンプリングとは



ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

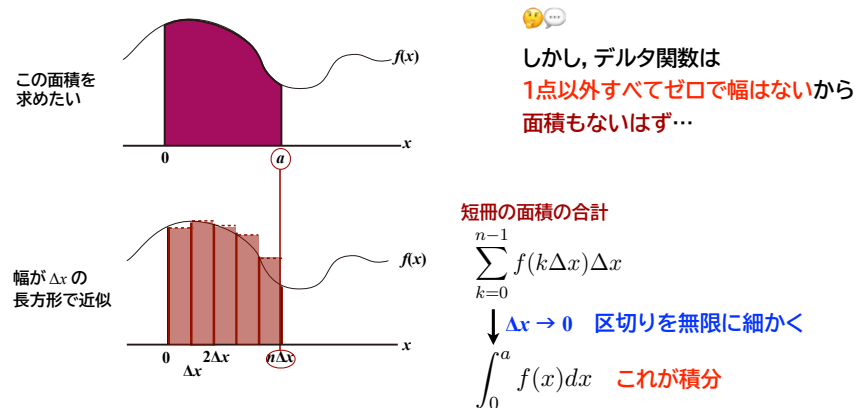
$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$ をはさんで積分すると1

何ですかこれ?? 😊

積分って何でしたっけ



ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$ をはさんで積分すると1

高さは、何だともいえない (「無限」でもない。なぜなら $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x) dx = k$)

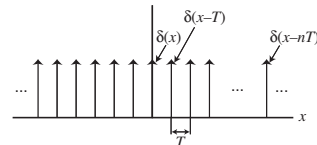


幅はなくても面積はあるんです。
だから、こんな「↑」で表さざるを得ない

くし形関数 $\text{comb}_T(x)$ とサンプリング

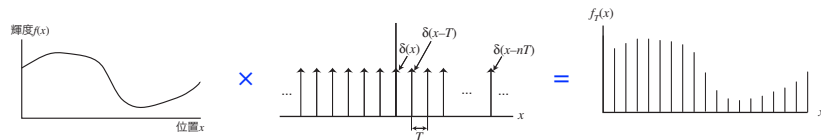
くし形関数 $\text{comb}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$

デルタ関数を等間隔に並べたもの



サンプリング周期 T
サンプリング周波数 $1/T$

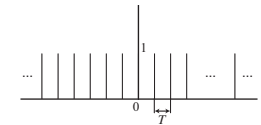
サンプリングとは、くし形関数とのかけ算 $f_T(x) = f(x) \text{comb}_T(x)$



こんなややこしい関数でなければいけない

ディラックのデルタ関数ではなく、「縦棒」を並べて、くし形関数にしてはだめ？

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



だめです 🙄

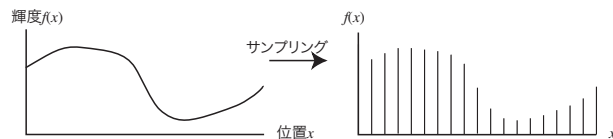
縦棒の関数は、幅がなくて高さ1だから、積分したらゼロ

→画像の輝度の合計がゼロのはずはない

ディラックのデルタ関数は、幅がないのに積分したら1 というへんな関数(超関数)

※ただ、こういうややこしい話になっているのは、「積分」をもとに考えを進めているからでもあります。
そのあたりは、次回の「離散フーリエ変換」で説明します。

サンプリングされたら、周波数の範囲は？



周波数がある範囲におさまっているとき

サンプリングした後の周波数の範囲は？

サンプリングされた関数である $f_T(x)$ のフーリエ変換を求める

$$f_T(x) = f(x) \text{comb}_T(x)$$

2つの関数のかけ算のフーリエ変換は？

かけ算のフーリエ変換

こうなります

$$FT[f(x)g(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[g(x)](\nu)$$

かけ算のフーリエ変換

フーリエ変換と

フーリエ変換の

???

*は、コンヴォリューション(畳み込み)といいます

$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

その意味は、少し後で...

サンプリングされた関数のフーリエ変換

つまり

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換は もとの関数のフーリエ変換と くし形関数のフーリエ変換の コンヴォリューション

くし形関数のフーリエ変換は

$$FT[\text{comb}_T(x)](\nu) = \frac{1}{T} \text{comb}_{1/T}(\nu)$$

くし形関数のフーリエ変換はくし形関数, ただし間隔が逆数

くし形関数とのコンヴォリューション

$$FT[f_T(x)](\nu) = FT[f(x)](\nu) * FT[\text{comb}_T(x)](\nu)$$

サンプリングされた関数のフーリエ変換は もとの関数のフーリエ変換と くし形関数のフーリエ変換の コンヴォリューション

「くし形関数とのコンヴォリューション」とは？

「デルタ関数とのコンヴォリューション」を並べたもの

さて、コンヴォリューションとは

$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

コンヴォリューションの
 t での値は

関数 f と関数 g を
 t だけずらして重ねたときの、
重なり面積

【参考リンク】のサイトを使って説明します。

デルタ関数とのコンヴォリューション

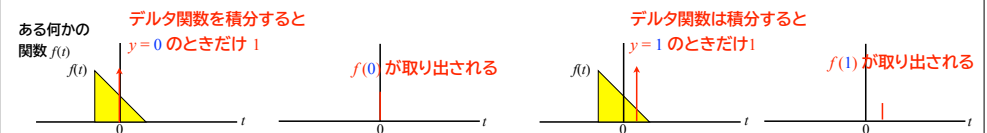
ある何かの関数 $f(t)$

$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t-y)dy$$

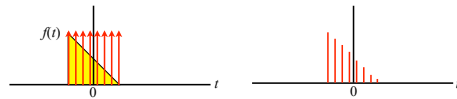
デルタ関数はここが0のとき以外はゼロ → 積分してもゼロ

$t=0$ のとき $[f * \delta](t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(0-y)dy$ $t=1$ のとき $[f * \delta](t)|_{t=1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(1-y)dy$

$y=0$ のとき以外は積分に無関係 $y=1$ のとき以外は積分に無関係



デルタ関数とのコンヴォリューション



$t = a$ のとき, $f(a)$ が取り出される

つまり

$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは, $f(x)$ 自身



画像の「ぼけ」は,
画像と「ぼけ関数」とのコンヴォリューション

画像の各点をデルタ関数と考えると,
各点に「ぼけ関数」が重ねられている

【参考リンク】で説明します。

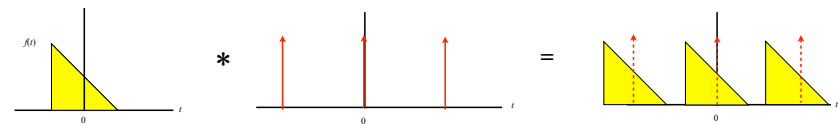
くし形関数とのコンヴォリューション



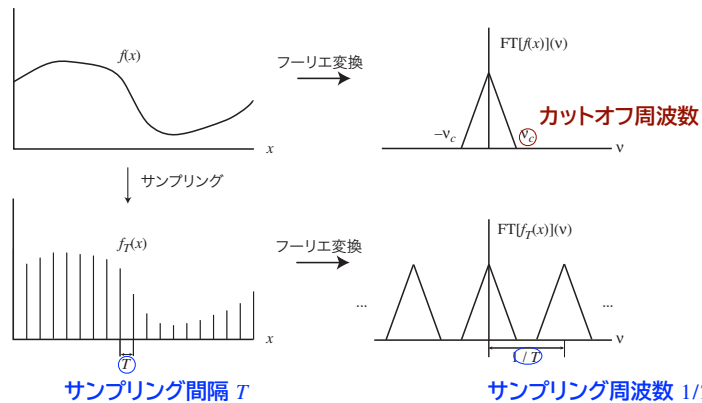
$f(x)$ とデルタ関数のコンヴォリューションは, $f(x)$ 自身

くし形関数は, デルタ関数が等間隔に並んでいる

くし形関数とのコンヴォリューションは, 元の関数の「コピー」が等間隔に並んだものになる

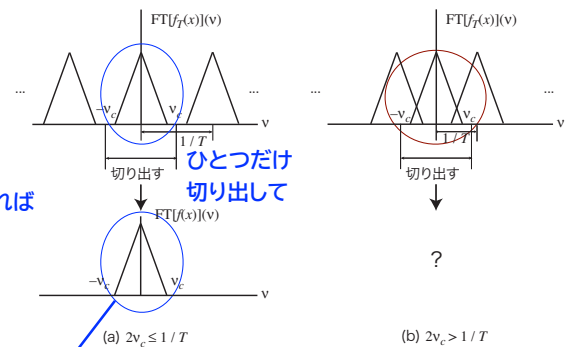


まとめると・サンプリングとフーリエ変換



周波数空間での間隔

サンプリング周波数 ($1/T$) が,
カットオフ周波数の2倍以上細かければ



これを
逆フーリエ変換して
元の関数に戻せる

サンプリング間隔が粗いと, 周波数空間で重なり
合ってしまう元には戻せない (エイリアジング)

まとめ・サンプリング定理

ある関数(画像でも, 音声でも)を, それのもつ**最大の周波数の2倍以上の細かさ**でサンプリングしておけば,

サンプリングされたもの(デジタル画像, デジタル音声)から元の関数(画像や音声)を再現できる

例)CDはサンプリング周波数が44.1kHz

→22.05kHzまでの音声記録できる

22.05kHzまでしか含まれていないとわかっているときには
正しく記録できる

(録音時に, それ以上の周波数の成分が入らないように
しなければならない)