

2025年度秋学期

画像情報処理

第2部・画像情報圧縮 /

第9回

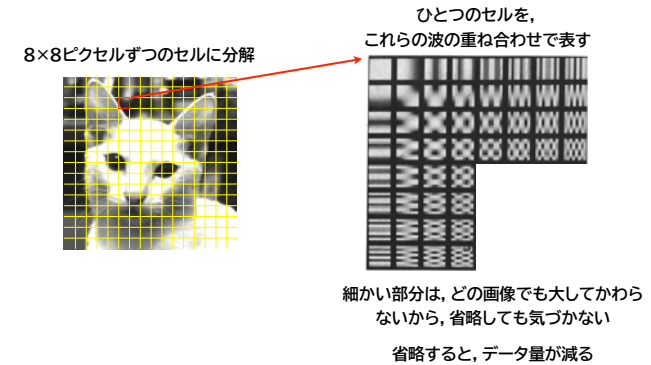
離散フーリエ変換と
離散コサイン変換



関西大学総合情報学部
浅野 晃

JPEG方式による画像圧縮

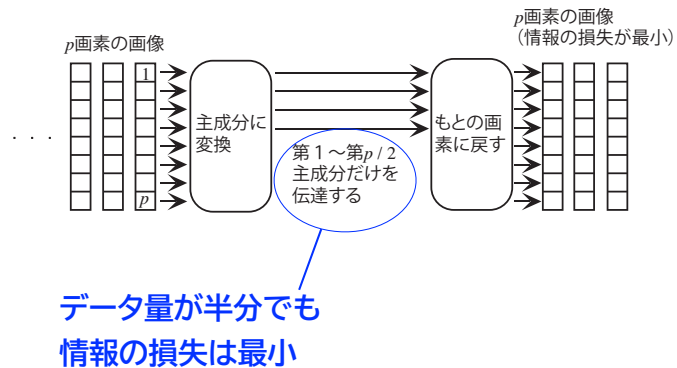
画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす



(図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載) 2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 2 | 28

Karhunen-Loève変換(KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



KL変換の大問題

主成分を求めるには、分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには、
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能🙄

そこで

ベクトルの直交変換を、行列の直交変換におきかえることで、
どういふ変換かが見えるようにする

原画像 X は、 m^2 個の基底画像にそれぞれ
変換後画像 Z の各要素をかけて足し合わせたものになっている

どういふ直交変換(ユニタリー変換)を用いるかを、基底画像を目でみて決める

$$X = z_{11}r_1r'_1 + z_{12}r_1r'_2 + \cdots + z_{mm}r_mr'_m$$

こんな「基底画像セット」なら、
最後の方の基底画像は
ごまかせそうだ

基底画像 基底画像 基底画像

そこで

ベクトルの直交変換を、行列の直交変換におきかえることで、
どういふ変換かが見えるようにする

原画像 X は、 m^2 個の基底画像にそれぞれ
変換後画像 Z の各要素をかけて足し合わせたものになっている

どういふ直交変換(ユニタリー変換)を用いるかを、基底画像を目でみて決める

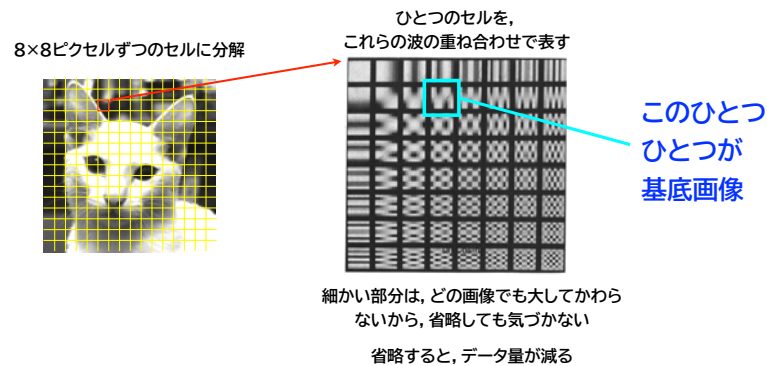
$$X = z_{11}r_1r'_1 + z_{12}r_1r'_2 + \cdots + z_{mm}r_mr'_m$$

基底画像として
波を用いる
フーリエ変換

基底画像 基底画像 基底画像

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし、一部を省略して、データ量を減らす



2次元離散フーリエ変換を行列で🤖

2次元フーリエ変換

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$$

指数関数の性質から

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) \exp(-i2\pi\nu_y y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy \\ &\quad \text{x方向のフーリエ変換} \quad \text{y方向のフーリエ変換} \end{aligned}$$

2次元フーリエ変換は分離可能

2次元離散フーリエ変換

1次元離散フーリエ変換

$$U(\overset{\textcircled{N-1}}{k}) = \sum_{n=0}^{\overset{\textcircled{N-1}}{n}} u(n) \exp(-i2\pi \frac{\overset{\textcircled{k}}{k}}{\overset{\textcircled{N}}{N}} n) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

2次元離散フーリエ変換(分離可能な形式)

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{M} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

縦横の大きさが同じなら

$$U(k, l) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{\overset{\textcircled{N-1}}{n}} u(m, n) \exp(-i2\pi \frac{k}{\overset{\textcircled{N}}{N}} m) \right] \exp(-i2\pi \frac{l}{N} n)$$

離散フーリエ変換を行列で表す

行列の直交変換の形で表す $Z = RXR'$

$$\begin{aligned} U(\overset{\downarrow}{k}, \overset{\downarrow}{l}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{\vec{m}=0}^{\overset{\rightarrow}{N-1}} u(\vec{m}, \vec{n}) \exp(-i2\pi \frac{\vec{k}}{N} \vec{m}) \right] \exp(-i2\pi \frac{\overset{\downarrow}{l}}{N} \overset{\downarrow}{n}) \\ &\quad \downarrow \\ \overset{\downarrow}{l} \downarrow (Z = U(k, l)) &= \overset{\downarrow}{l} \downarrow (R) \cdot \vec{n} \rightarrow (X = u(m, n)) \cdot \vec{m} \rightarrow (R') \end{aligned}$$

離散フーリエ変換を行列で表す

前ページのように行列を配置すると

$$\begin{aligned} R' &= \begin{pmatrix} \overset{m \downarrow}{\begin{matrix} e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{k}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} 0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} m} & & e^{-i2\pi \frac{k}{N} m} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} (N-1)} & & & & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} (N-1)} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ R &= \begin{pmatrix} \overset{l \downarrow}{\begin{matrix} e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & \dots & e^{-i2\pi \frac{0}{N} n} & \dots & e^{-i2\pi \frac{0}{N} (N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i2\pi \frac{0}{N} 0} & & e^{-i2\pi \frac{l}{N} n} & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} 0} & & & & e^{-i2\pi \frac{N-1}{N} (N-1)} \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

離散フーリエ変換を行列で表す

指数関数がややこしいので

$$W_N = \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right)$$

とくと、

$$R = \begin{pmatrix} W_N^{0 \cdot 0} & \cdots & W_N^{0 \cdot n} & \cdots & W_N^{0 \cdot (N-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ W_N^{l \cdot 0} & & & W_N^{l \cdot n} & \\ \vdots & & & \ddots & \\ W_N^{(N-1) \cdot 0} & & & & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

$$Z = RXR$$

ところで、本当にユニタリー？

「ある列」と「ある列の複素共役」の内積

異なる列なら0, 同じ列なら1 ならユニタリー

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{ln} \cdot (W_N^{ln'})^* &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i2\pi ln}{N}\right) \exp\left(\frac{i2\pi ln'}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \exp\left(-\frac{i\{(n-n')2\pi\}l}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} \end{aligned}$$

異なる列(等比数列の和)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} &= \frac{1 - W_N^{(n-n')N}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - (W_N^N)^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} \\ &= \frac{1 - 1^{(n-n')}}{1 - W_N^{(n-n')}} = \cancel{0} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

同じ列

$$\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{(n-n')l} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = \textcircled{N} \quad \text{NG}$$

ユニタリー離散フーリエ変換

いままでに説明した R だと $RR'^* = \textcircled{N}I$
ユニタリーでない

$$W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{i2\pi}{N}\right) \quad \text{とおけば}$$

$$RR'^* = I \quad \text{となって、ユニタリーになる} \quad \begin{aligned} Z &= RXR \\ X &= R^*ZR^* \end{aligned}$$

離散フーリエ変換はユニタリー変換の一種である

→ 離散フーリエ変換も「座標の回転」の一種である

「画素値の並び」から、「波」を表す基底画像の組み合わせへ

離散コサイン変換 🤖

離散コサイン変換

フーリエ変換では、**複素数**を扱う必要がある
そこで、**実数だけで計算できる**変換 JPEG方式もこれを用いている

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} n \rightarrow \\ \vdots \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} l \downarrow \\ \vdots \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & r(n, l) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$r(n, l) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & l = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} \cos \frac{(2n+1)l\pi}{2N} & l \neq 0 \end{cases}$$

離散コサイン変換とフーリエ変換

離散コサイン変換は、**関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換**に相当

偶関数 ($f(x) = f(-x)$) のフーリエ変換は、**実数の計算になる**

$$\begin{aligned} F(\nu_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx \end{aligned}$$

第1項の x を $-x$ に変数変換

$$F(\nu_x) = \int_{-\infty}^0 f(\underbrace{-x}_{f(x)}) \exp\{-i2\pi(\nu_x \underbrace{(-x)}_{-dx})\} \underbrace{(-dx)}_{dx} + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

偶関数のフーリエ変換

つまり

$$F(\nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{i2\pi(\nu_x x)\} dx + \int_0^{\infty} f(x) \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\} dx$$

$$F(\nu_x) = \int_0^{\infty} f(x) [\exp\{i2\pi(\nu_x x)\} + \exp\{-i2\pi(\nu_x x)\}] dx$$

指数関数と三角関数の関係から

$$F(\nu_x) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi(\nu_x x) dx \quad \text{実数の計算になる}$$

離散コサイン変換

離散コサイン変換は、**関数を折り返して偶関数にしたもののフーリエ変換**に相当

1次元の場合

折り返す

$$u(N-1), u(N-2), \dots, u(1), u(0) \quad u(0), u(1), \dots, u(N-2), u(N-1)$$

2N 要素の数列

離散コサイン変換

N 要素の離散コサイン変換は
$$U(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) & k = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} & k \neq 0 \end{cases}$$

$k \neq 0$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} U(k) &= \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cos \frac{(2n+1)k\pi}{2N} \quad \text{cos を指数関数で表す} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{i(2n+1)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(2n+1)k\pi}{2N} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i((-n)-1/2)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(n+1/2)k\pi}{2N} \end{aligned}$$

離散コサイン変換

$$U(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i((-n)-1/2)k\pi}{2N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \exp \frac{-i(n+1/2)k\pi}{2N}$$

これは、折り返した数列に対して

$$u(N-1), u(N-2), \dots, u(1), u(0), u(0), u(1), \dots, u(N-2), u(N-1)$$

$$\dots \quad \frac{3}{2} \text{ 番} \quad \frac{1}{2} \text{ 番} \quad \frac{1}{2} \text{ 番} \quad \frac{3}{2} \text{ 番} \quad \dots$$

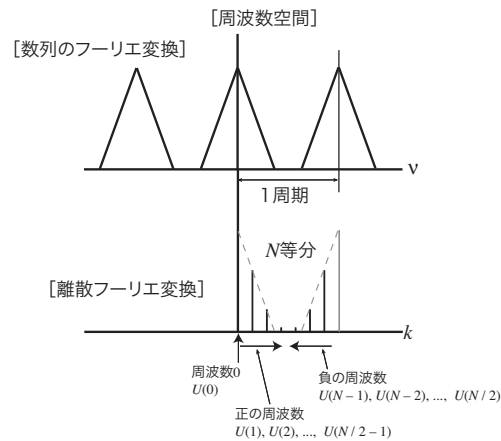
(0 番)

と番号をつけ直して
フーリエ変換をしたのと同じ

2N項のフーリエ変換をしていることになるので、
 $k = 0$ が周波数0, $k = 1, \dots, N-1$ の順に周波数が高くなる

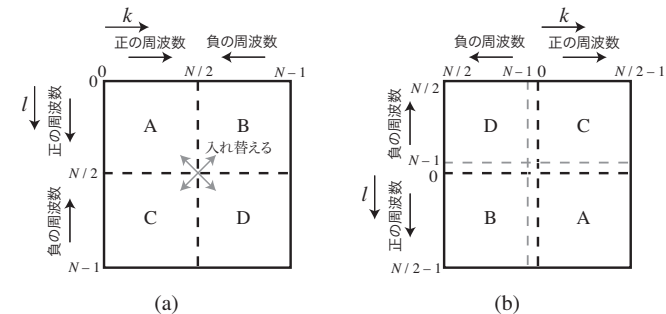
離散フーリエ変換と正負の周波数

1次元の離散フーリエ変換では
こういう折り返し



離散フーリエ変換と正負の周波数

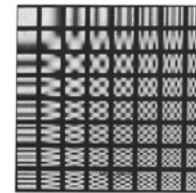
2次元の離散フーリエ変換でもこういう折り返しがあったが、
離散コサイン変換では折り返しはない



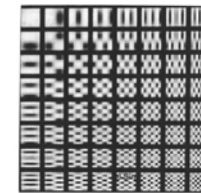
実例 

25 | 20

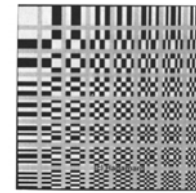
基底画像の例



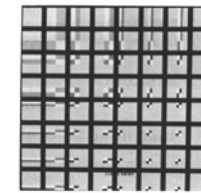
コサイン変換



サイン変換



Hadamard変換(-1と1)



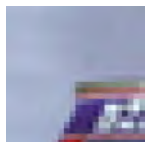
Haar変換

A. K. Jain, Fundamentals of
B. Digital Image Processing (1988)

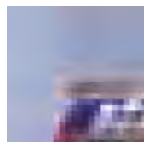
2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 26 | 28

画像情報圧縮の例

データ量:80KB



データ量:16KB



(8×8ピクセルのセルが見える)

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 27 | 28

リングング(モスキートノイズ)



※粗い波だけを重ねて
エッジ(明暗の境界線)を
表すと生じる

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 晃 28 | 28