

2025年度秋学期

画像情報処理

第3部・CTスキャナ — 投影からの画像の
再構成／

第10回
Radon変換と投影切断面定理



関西大学総合情報学部
浅野 晃

CTスキャナとは😊

CTスキャナとは

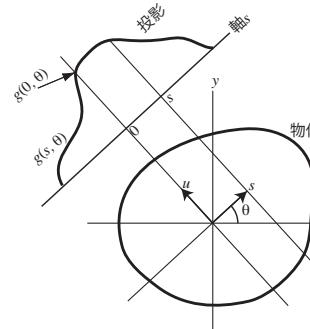
CT(computed tomography) = 計算断層撮影法



(「わんぱく」<http://kids.wanpug.com/illust234.html>)

体の周囲からX線撮影を行い、そのデータから断面像を計算で求める

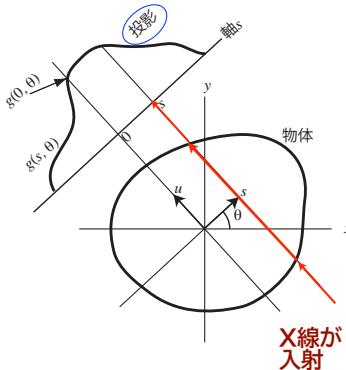
CTを実現するには



ある方向からX線を照射し、
その方向での吸収率(投影)を調べる

すべての方向からの投影がわかれば、
元の物体における吸収率分布がわかる

投影とは



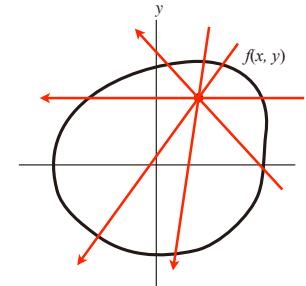
X線がある直線に沿って物体を通過するとき、直線上の各点で吸収される

通過したX線の量は、入射した量に吸収率の積分(線積分)をかけたものになっている

投影=吸収率の線積分
直線上の吸収率の合計であって、どの点で吸収されたかはわからない

2025年度秋学期 画像情報処理／関西大学総合情報学部 浅野 光 5 | 19

Radonの示した定理



2次元関数の任意の点での値は

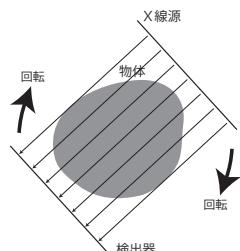
その点を通るすべての投影(線積分)がわかれれば求められる

どうやって求めるかは、あとで説明します。

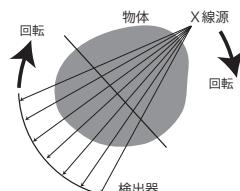
2025年度秋学期 画像情報処理／関西大学総合情報学部 浅野 光 6 | 19

各方向からの投影のしかた

理論上はこんなふうに考える



実際はこのようにX線を当てる



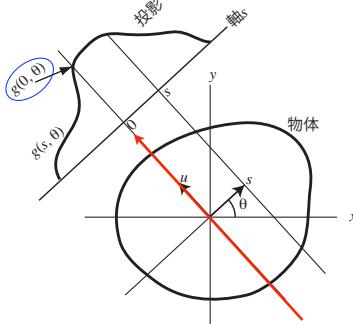
物体の1点について考えれば、投影する順番が異なるだけで、各方向の投影が得られるのは同じ

2025年度秋学期 画像情報処理／関西大学総合情報学部 浅野 光 7 | 19

Radon変換とray-sum😊

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

つまり $x \cos \theta + y \sin \theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを
積分する

$$g(0, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy$$

デルタ関数で表せる

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 9 | 19

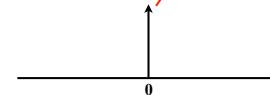
ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ

$x = 0$ をはさんで積分すると1

高さは、何だともいえない
(「無限」でもない。なぜなら → $\int_{-\infty}^{\infty} k \delta(x) dx = k$)

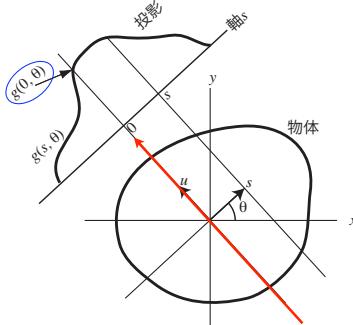


こんなふうに表さざるを得ない

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 10 | 19

Radon変換

投影を2次元の積分で表す



この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

つまり $x \cos \theta + y \sin \theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを
積分する

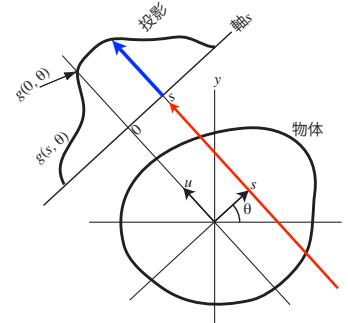
$$g(0, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy$$

デルタ関数で表せる

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 11 | 19

Radon変換

$g(s, \theta)$ は?



この線上では

$$x \cos \theta + y \sin \theta - s = 0$$

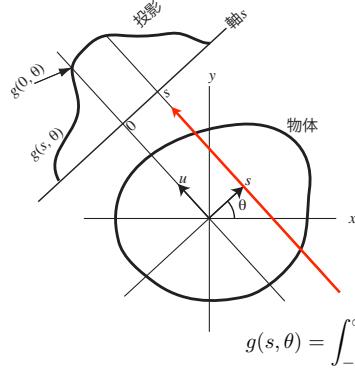
$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

Radon変換

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 12 | 19

ray-sum

投影を1次元の線積分で表す



(x, y) と (s, u) の関係は θ の回転

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

(x, y) を (s, u) で表す

この線上では
s が一定で u が変化

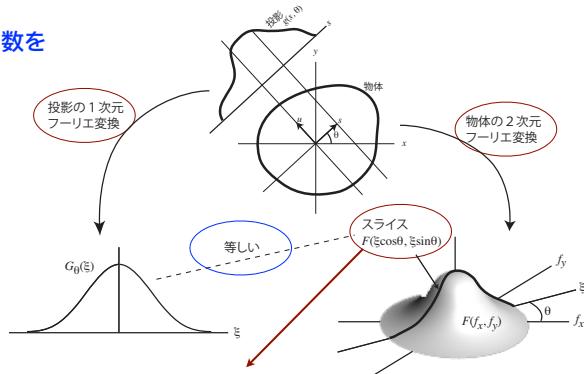
ray-sum

2025年度秋学期 画像情報処理／関西大学総合情報学部 浅野 光 13 | 19

投影切断面定理 😊

投影切断面定理

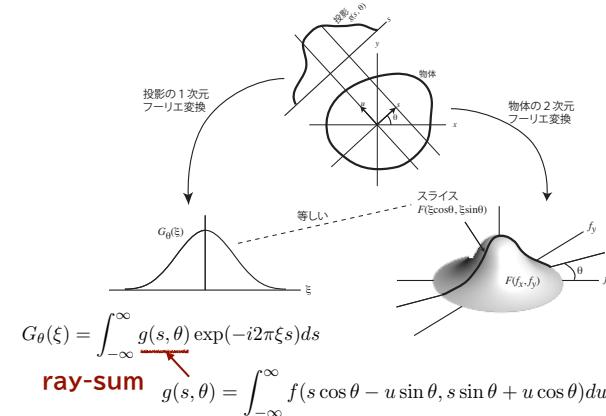
投影群から2次元関数を
再構成する



「スライス」がすべてそろえば、2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる

2025年度秋学期 画像情報処理／関西大学総合情報学部 浅野 光 15 | 19

投影切断面定理の証明



$$ray-sum \quad g(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du$$

2025年度秋学期 画像情報処理／関西大学総合情報学部 浅野 光 16 | 19

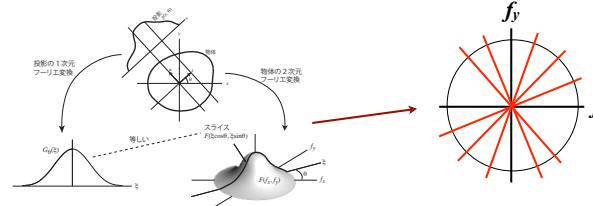
投影切断面定理の証明

$$\begin{aligned}
 G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) \times \exp(-i2\pi\xi s) ds du \quad (x, y) \text{ と } (s, u) \text{ の関係} \\
 &\quad \text{どちらも正方座標の小さな正方形} \\
 dxdy &= dsdu \\
 &\quad x, y \text{ に書き戻す} \\
 G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) dx dy \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi((\xi \cos \theta)x + (\xi \sin \theta)y)) dx dy \\
 &= F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \quad \theta \text{ 方向のスライス}
 \end{aligned}$$

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 17 | 19

フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の「すべてのスライス」を求めるることはできない



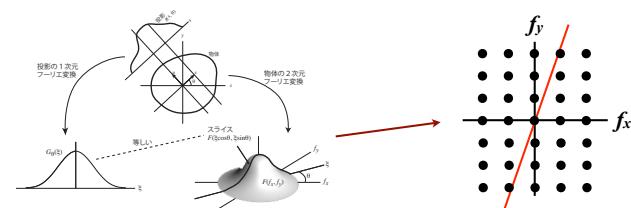
ひとつの投影 = ひとつのスライス

有限個の投影では、2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない → 補間を行う

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 18 | 19

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が、コンピュータで計算する限りは「離散的」



周波数空間での誤差は、画像全体にひろがる
アーティファクトを生む

スライスは極座標
2次元フーリエ変換は正方座標

コンピュータの能力が低かった時代は精密な計算が難しかった
→さてどうした？

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 19 | 19