

2025年度秋学期

画像情報処理

第3部・CTスキャナ — 投影からの画像の
再構成／

第11回 逆投影法による再構成

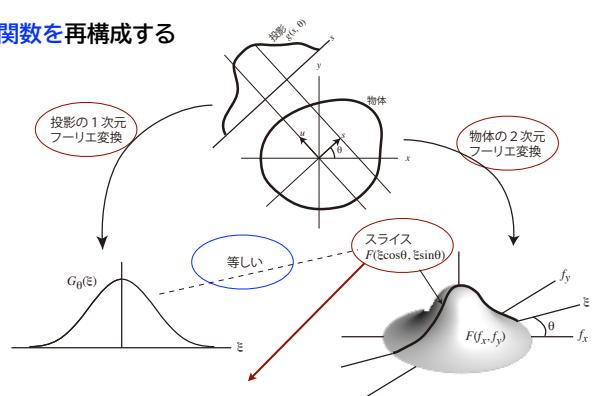


関西大学総合情報学部
浅野 晃

投影切断面定理の復習

投影切断面定理

投影群から2次元関数を再構成する



「スライス」がすべてそろえば、2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる

フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の「すべてのスライス」を求めるることはできない

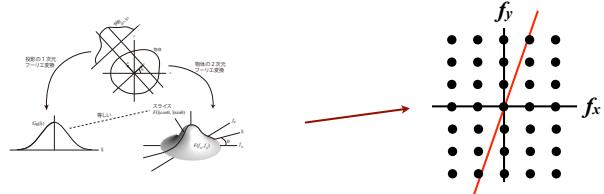


ひとつの投影=ひとつのスライス

有限個の投影では、2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない → 補間を行う

フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が、コンピュータで計算する限りは「離散的」



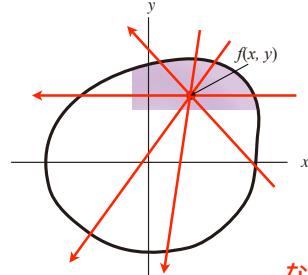
周波数空間の誤差は、画像全体にひろがる

アーティファクトを生む

コンピュータの能力が低かった時代は
精密な計算が難しかった →さてどうした?

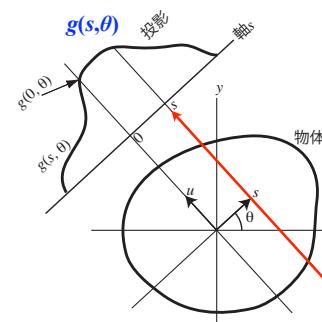
逆投影法

素朴な再構成 – 逆投影



どの線積分にも $f(x, y)$ は含まれているのだから、
合計したら $f(x, y)$ が強調される?

逆投影法



$$b(x, y) = \int_0^\pi g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

復元できているのだろうか？

Radon変換

$$g(s, \theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

逆投影

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' \right] d\theta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^{\pi} \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy'$$

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 9 | 19

復元できているのだろうか？

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' \right] d\theta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^{\pi} \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy'$$

$h(\theta)$ が有限個の θ_k でしか0にならないとき

$$h[\delta(\theta)] = \sum_k \frac{1}{|h'(\theta_k)|} \delta[\theta - \theta_k]$$

三角関数を合成

$$(x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \sin(\theta + \alpha),$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{y' - y}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} = \sin^{-1} \frac{x' - x}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$$

$\theta = \pi - \alpha$ のときだけ0

$$\delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \cos(\pi)} \delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 10 | 19

復元できているといえなくもないが…

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \delta(x' \cos \theta + y' \sin \theta - (x \cos \theta + y \sin \theta)) dx' dy' \right] d\theta$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\int_0^{\pi} \delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) d\theta \right] dx' dy'$$

$$\delta((x' - x) \cos \theta + (y' - y) \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \cos(\pi)} \delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

積分すると1

よって

$$b(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \left[\frac{1}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \right] dx' dy'$$

$$= f(x, y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

コンヴォリューションになっている

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 11 | 19

復元するには

$$b(x, y) = f(x, y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

フーリエ変換すると、コンヴォリューション→積

$$FT[b(x, y)] = FT[f(x, y)] \times FT \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

$$\therefore FT[f(x, y)] = FT[b(x, y)] / FT \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

$$FT \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \text{ なので}$$

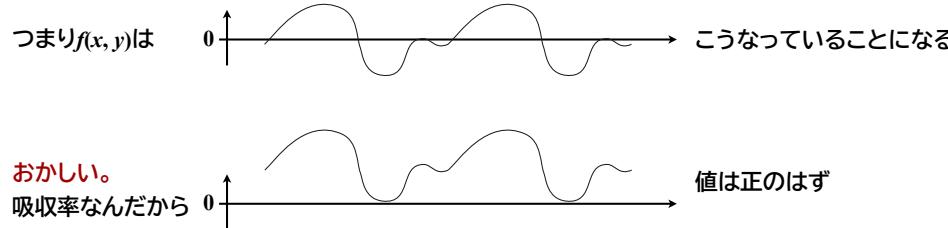
$$FT[f(x, y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times FT[b(x, y)]$$

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 12 | 19

これでいいのでしょうか？

$$FT[f(x, y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times FT[b(x, y)] \quad f_x = f_y = 0 \quad \text{周波数0の成分は } FT[f(x, y)] = 0$$

全体の平均が0



そもそも

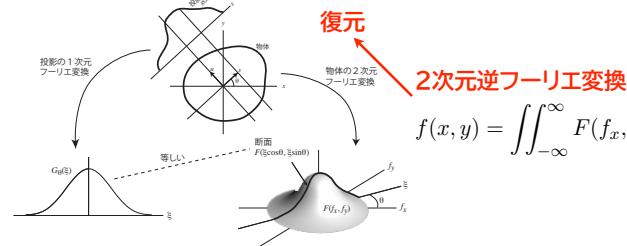
$$FT[b(x, y)] = FT[f(x, y)] \times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] \quad FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \quad f_x = f_y = 0$$

で発散している

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 13 | 19

フィルタ補正逆投影法

再び投影切断面定理



$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 14 | 19

フィルタ補正逆投影法

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$

$\square df_x df_y$ 正方座標の微小面積

↓

極座標に変換 $f_x = \xi \cos \theta, f_y = \xi \sin \theta$

$\xi d\xi d\theta$ 極座標の微小面積

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta$$

↓

投影切断面定理より
 $G_\theta(\xi) = F(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta$$

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 15 | 19

フィルタ補正逆投影法

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) \xi d\xi d\theta$$

↓

積分区間を変換

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x \cos \theta + y \sin \theta)) |\xi| d\xi d\theta$$

$s = x \cos \theta + y \sin \theta$

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s \xi) d\xi \right] d\theta$$

↓

| $\xi| G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

2025年度秋学期 画像情報処理 / 関西大学総合情報学部 浅野 光 16 | 19

フィルタ補正逆投影法

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi \right] d\theta$$

$|\xi| G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

$$\hat{g}(s, \theta) \equiv \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

とおくと、

$$f(x, y) = \int_0^\pi \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

投影を、「周波数空間で $|\xi|$ 倍するフィルタ」を適用してから、逆投影

コンヴォリューション逆投影法

$$\hat{g}(s, \theta) \equiv \hat{g}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

ある角度 θ での投影を

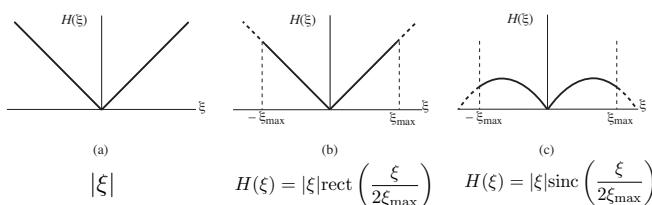
周波数空間で $|\xi|$ 倍 \longrightarrow 実空間では $FT^{-1}[|\xi|]$ とのコンヴォリューション

$$\hat{g}(s, \theta) = g(s, \theta) * FT^{-1}[|\xi|]$$

最初からこれを定義しておけば、フーリエ変換の必要はない

極座標→直交座標の変換は実空間で行うので、
誤差が画面全体に拡散することはない

フィルタ関数



高い周波数成分を増幅すると
ノイズを強調してしまうので、抑える

※現代のCTスキャナでは、

初期状態の物体から計算で投影を求める→実際の投影と比較して、物体を修正する
という操作を繰り返すことで、実際の物体に近づけていく、という方法(逐次近似法)も
用いられています