2025年度春学期

統計学

第7回

データの関係を知る（2）

— 回帰と決定係数

関西大学総合情報学部
浅野 晃

回帰分析とは🤔

回帰分析とは

多変量データがあるとき
ある変量の変化を他の変量の変化で
[説明]する方法

説明？🤔

回帰分析とは

緯度と気温のデータを例にとると

相関分析
「緯度が上がると，気温が下がる」という
傾向があることを見いだす

緯度と気温について，「どちらからどちらへ」という方向は考えない

回帰分析
「緯度から気温が計算で求められる」と考える
緯度が1度上がると，気温が○℃下がる

回帰分析とは

緯度が上がるから気温が下がると考える
緯度が1度上がると，気温が◯℃下がる

各都市の気温は，緯度から計算で求められるという[モデル]を考える

※前回の「（学年を無視すれば）成績が体格から推測できる」というのも，
「成績が体格から計算で求められるというモデル」としてはあり。
（学年を無視することが妥当かどうかは別）

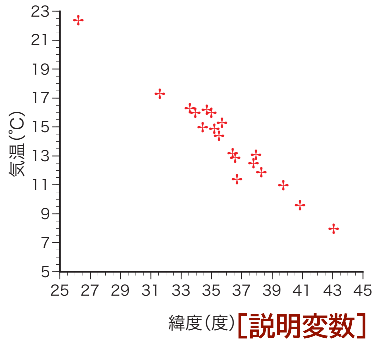
統計学では，気温の分散は，緯度によって[説明]されるという
そして，そのモデルでどの程度説明がつくかを考える

※「モデルを考える」のは，科学の考え方そのものといえます。

説明変数・被説明変数

気温は緯度によって説明される（というモデル）

[被説明変数]



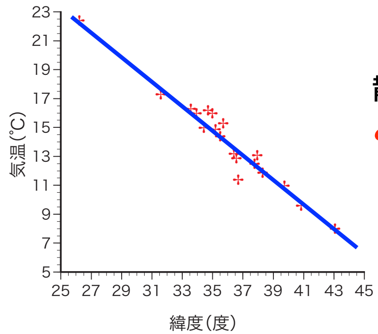
[説明変数]

線形単回帰🤔

線形単回帰

気温の分散は緯度によって説明される

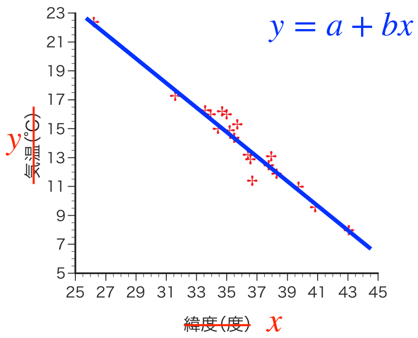
どう説明される？どういうモデルか？



散布図上で直線の関係がある，
というモデルを考える

線形単回帰

散布図上で直線の関係がある



$y = a + bx$ という式で表される関係

［線形単回帰］という

$y = a + bx$?

直線の式は $y = ax + b$ と習ったような🤔

どちらも正解です

$y = ax + b$ 降冪(こうべき)順

$y = a + bx$ 昇冪(しょうべき)順

$y = a + bx$?

降冪(こうべき)順は
何次関数かすぐわかる

$y = ax + b$ ただちに1次関数とわかる

$y = ax^2 + bx + c$ これは2次関数

昇冪(しょうべき)順は
説明変数を付け加えていくことができる

$y = ax \quad + b_2 x_2 \quad + b_3 x_3 + \ldots$

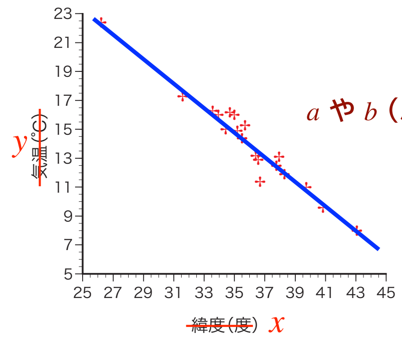
気温　緯度　標高　海からの距離 …

説明変数が2つ以上ある場合を[重回帰]という

統計学では，昇冪順を使うことが多い

線形単回帰

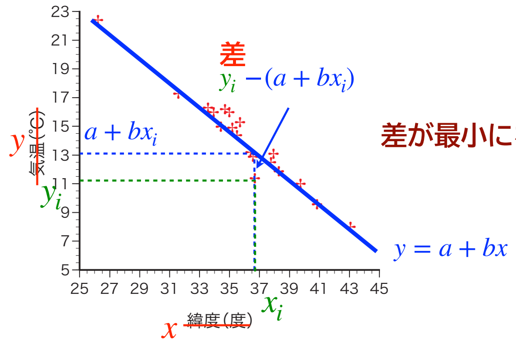
$y = a + bx$ という式で表される関係



a や b (パラメータ)はどうやって求める？

パラメータの決定

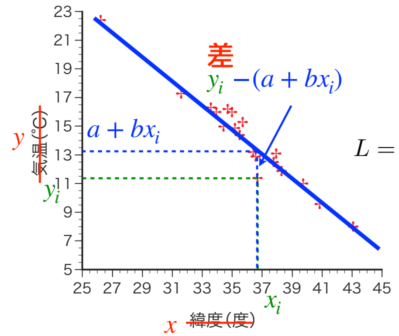
$x = x_i$ のとき モデルによれば $y = a + bx_i$　実際は y_i



差が最小になるように a, b を決める

パラメータの決定

の2乗
すべての x_i について，差の合計が最小になるように a, b を決める



$$L = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (a + bx_i)\}^2$$

が最小になる a, b を求める

L が最小になる a, b を求める

- 偏微分による方法（付録1）
- 「2次関数の最大・最小」による方法（付録2）

付録に収録してある数式の展開は，試験の範囲には含みません。

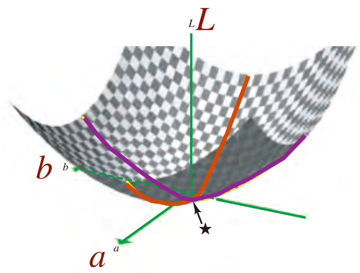
今から，「偏微分による方法」の考え方
（数式そのものではなくて考え方）を説明します。

「偏微分」による方法

$$L = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (a + bx_i)\}^2$$

a, b の2次関数

が最小になる a, b を求める

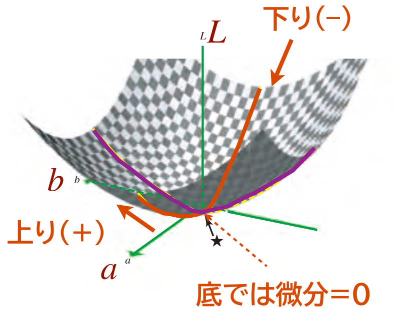


a だけの関数と考えて微分

b だけの関数と考えて微分

微分？😵

微分？



a だけの関数と考えて微分

微分は，傾きを求める計算

b についても同じ，底では微分=0

底で L が最小だから，
これらから a, b を求める

計算はともかく結論は

- 偏微分による方法（付録1）
- 「2次関数の最大・最小」による方法（付録2）

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

σ_{xy}：x, y の共分散

σ_x^2：x の分散

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$\bar{y}$：y の平均

$\bar{x}$：x の平均

最小二乗法

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (a + bx_i)\}^2$$

を最小にしたので［最小二乗法］

$$y = a + bx$$

［回帰方程式］あるいは［回帰直線］

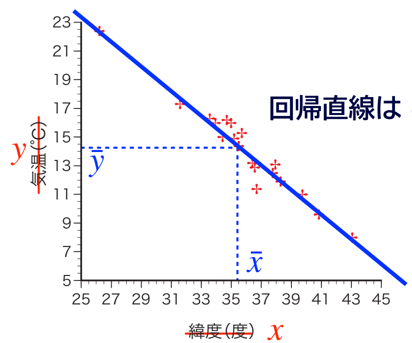
［回帰係数］

ところで

$y = a + bx$

$a = \bar{y} - b\bar{x}$

から $\quad y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$



回帰直線は $(\bar{x}, \bar{y})$ を通る

線形単回帰の結果を使う💡

緯度と気温(前回の講義)の例で

散布図上に回帰直線をひく

緯度を x , 気温を y として回帰直線 $y = a + bx$ を求めると

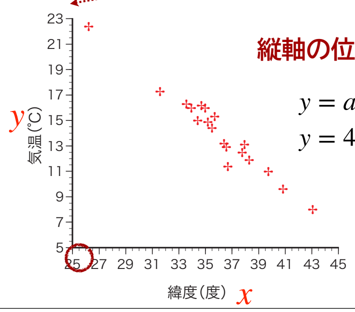
→ $b = -0.850, \quad a = 44.60$

回帰直線は $y = 23.35$ を通る

縦軸の位置($x = 25$)のとき y の値は

$y = a + bx$ に $x = 25.0$ を代入

$y = 44.60 + (-0.850) \times 25.0 = \boxed{23.35}$



散布図上に回帰直線をひく

緯度をx, 気温をyとして回帰直線 $y = a + bx$ を求めると

→ $b = -0.850, \quad a = 44.60$

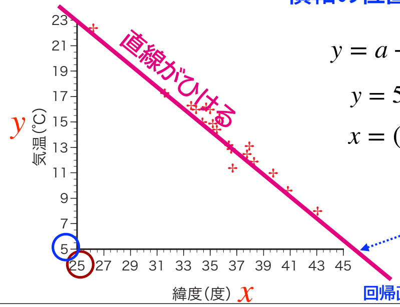
回帰直線は $y = 23.35$ を通る

横軸の位置($y = 5$)のとき x の値は

$y = a + bx$ より $x = \dfrac{y - a}{b}$

$y = 5$ を代入すると

$x = (5 - 44.60)/(-0.850) = \boxed{46.59}$



計算結果と図が合っていることをたしかめましょう

回帰直線は $x = 46.59$ を通る

求めた回帰直線を使って

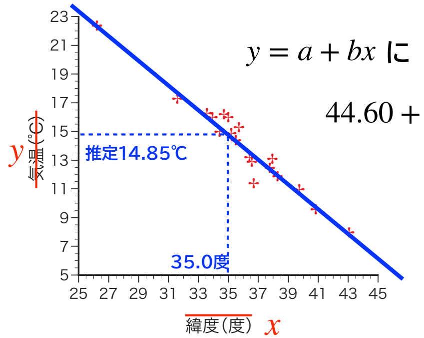
緯度35.0度の都市の気温は何℃かを推定する

緯度を x, 気温を y として回帰直線 $y = a + bx$ を求めると

→ $b = -0.850, \quad a = 44.60$

$y = a + bx$ に $x = 35.0$ を代入すると

$44.60 + (-0.850) \times 35.0$
$= 14.85$ (℃)



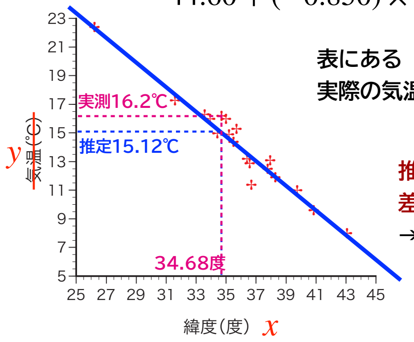
計算結果と図が合っていることをたしかめましょう

求めた回帰直線を使って

表の中にある大阪市(緯度34.68度)の気温を推定

$y = a + bx$ に　$x = 34.68$ を代入

$44.60 + (-0.850) \times 34.68 = \underline{15.12}$ (℃)



表にある
実際の気温は16.2℃

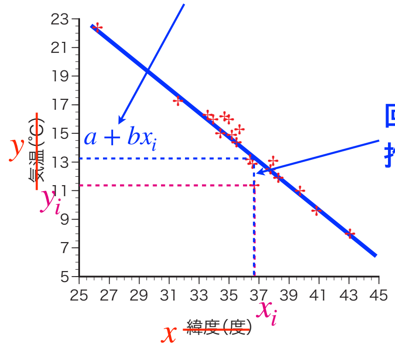
推定値と実測値に
差がある
→次の話へ

決定係数と「説明」🤔

残差

a, b が求められて，回帰直線が確定したとき

x_i に対する，回帰直線による y の推定値　$\hat{y}_i = a + bx_i$



回帰直線が確定しても残っている，
推定値と実測値の差
$\hat{y}_i$　y_i

d_i
この差を[残差]という

残差と決定係数

残差は，回帰方程式を使って y_i を推定したときの，
推定によって表現できなかった部分

残差について，次の関係がなりたつ(付録3)

$$\sum d_i^2 = (1 - r_{xy}^2) \sum (y_i - \bar{y})^2$$

残差　相関係数　相関係数の2乗 [決定係数]

🤔…

決定係数の意味

$\sum d_i^2 = (1 - r_{xy}^2)\sum(y_i - \bar{y})^2$ より

残差の2乗の平均

$$\underset{\text{決定係数}}{1 - r_{xy}^2} = \frac{\sum d_i^2/n}{\sum(y_i - \bar{y})^2/n}$$

y の偏差の2乗の平均 ＝ y の分散

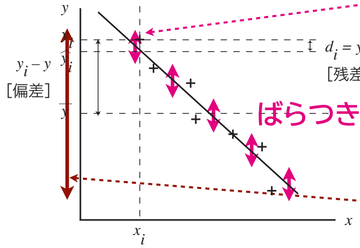
決定係数の意味

$$\underset{\text{決定係数}}{1 - r_{xy}^2} = \frac{\sum d_i^2/n}{\sum(y_i - \bar{y})^2/n}$$

残差の2乗の平均

y の偏差の2乗の平均（ y の分散）

回帰直線から見ると



ばらつきはこんなに減った

もともと y はこんなに
ばらついていたが,

決定係数の意味と「説明」

$$\underset{\text{決定係数}}{1 - r_{xy}^2} = \frac{\sum d_i^2/n}{\sum(y_i - \bar{y})^2/n}$$

回帰直線からのばらつき

y のもともとのばらつき

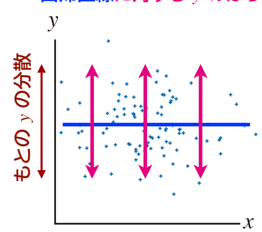
決定係数 ＝ 回帰直線によるばらつきの縮小の度合い

＝ 回帰直線によって, ばらつきの何%が「説明」できたか

決定係数の意味と「説明」

相関係数 ＝ 0, すなわち 決定係数 ＝ 0 のとき

回帰直線に対する y のばらつき



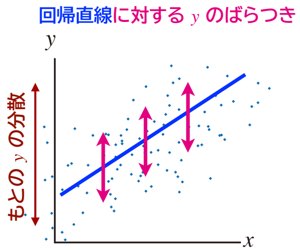
回帰直線に対する y のばらつきは

もとの y の分散と まったく変わらない

「回帰直線のまわりに散らばっている」と
説明したところで,
全く説明になっていない

決定係数の意味と「説明」

相関係数 = 0.7 すなわち 決定係数 ≒ 0.5 のとき



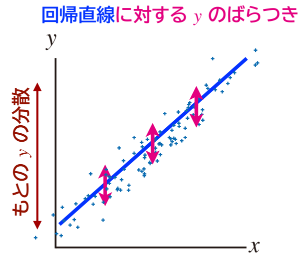
回帰直線に対する y のばらつきは

もとの y の分散 に比べて半分になっている

「回帰直線のまわりに散らばっている」と
説明したことで，
もとの y の分散の半分を説明した

決定係数の意味と「説明」

相関係数 = 0.9 すなわち 決定係数 ≒ 0.8 のとき



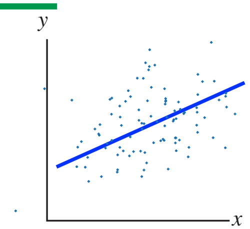
回帰直線に対する y のばらつきは

もとの y の分散 に比べて20%に減っている

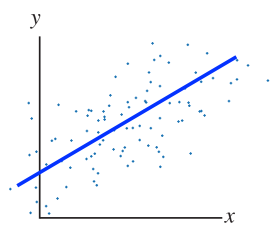
「回帰直線のまわりに散らばっている」と
説明したことで，
もとの y の分散の80%を説明した

ところで，前回の講義で
言いかけていたことですが💬💦

「中くらいの相関」とは



相関係数0.5
決定係数0.25



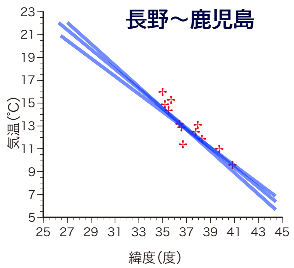
相関係数0.7
決定係数0.49

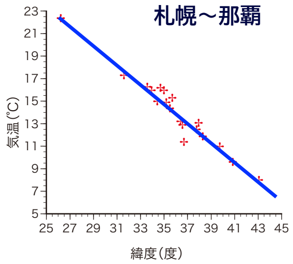
回帰直線ではもとの y の分散の
25%しか説明できていない

回帰直線でもとの y の分散の
50%を説明している

こちらのほうが，中くらいの相関関係
（分散の説明という意味では）

緯度と気温の例で





決定係数0.712

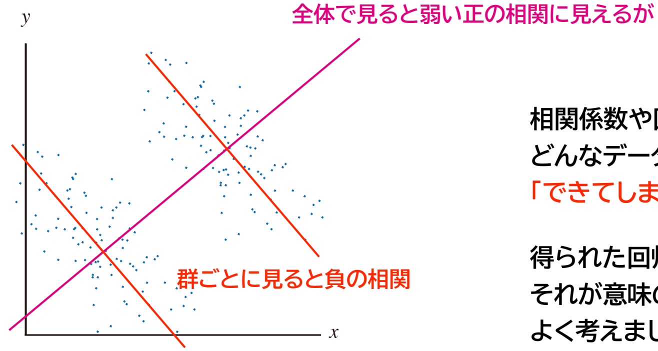
平均付近に密集していると不安定

決定係数0.949

平均から離れた個体があると安定する

注意すべき例

こういう分布だと



相関係数や回帰直線は
どんなデータであっても計算
「できてしまう」ことに注意

得られた回帰直線は，
それが意味のあるものかどうか，
よく考えましょう。