

2025年度春学期

統計学

第14回

分布についての仮説を検証する
— 仮説検定(1)



関西大学総合情報学部
浅野 晃

仮説検定の考え方は、単純

くじのあたり確率

「夏祭り, 夜店のくじに当たりなし
露天商の男を逮捕」

(朝日新聞大阪版2013年7月29日)

「1万円以上をつぎ込んだ男性が**不審に思い**、
府警に相談。28日に露店を家宅搜索し、当
りがないことを確認した」

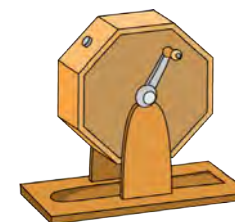
半分当たるというくじへの疑問

「半分の確率で当たる」というくじを
10回ひいても, 1回も当たらなかった

運が悪いのか？

それとも
「半分の確率で当たる」と
いうのが**ウソ**か？

どちらが正しいともいえない。



https://ilipop.com/png_season/dec01_a07.htm

こう考える

警察みたいに全部のくじを調べられないなら、

仮に、本当に「確率1/2で当たる」とする

そのとき、

10回ひいて1回も当たらない確率は、
 $(1/2)^{10} = 1/1024$

こう考える

本当に「確率1/2で当たる」なら、

10回ひいて1回も当たらない確率は1/1024(約0.001)

それでも「確率1/2で当たる」を信じるのは、

確率0.001でしか起きないことが、
いま目の前で起きていると信じるのと同じ

こう考える

確率0.001でしか起きないことが、
いま目の前で起きていると信じる

そりゃちょっと無理がありませんか？

というわけで、

「確率1/2で当たる」はウソ、と考えるほうが自然

これが【仮説検定】

復習:t分布と区間推定

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

母平均 μ

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわかっているものとする (説明の都合です)

正規分布の場合の区間推定

考え方

標本は、母集団分布と同じ確率分布にしたがう

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$

標本平均は、やはり正規分布にしたがうが、分散が $1/n$ になる

[性質2]

正規分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布の[性質1]により

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \text{ は標準正規分布にしたがう } N(0,1)$$

正規分布の場合の区間推定

例題

母集団
(受験者全体)

母平均 μ

正規分布
と仮定する

標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ をとりだす
サイズ n

標本平均 $\bar{X}$

母平均 μ の95%信頼区間が知りたい

母分散 σ^2 がわからないので、不偏分散 s^2 で代用

t分布

t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は

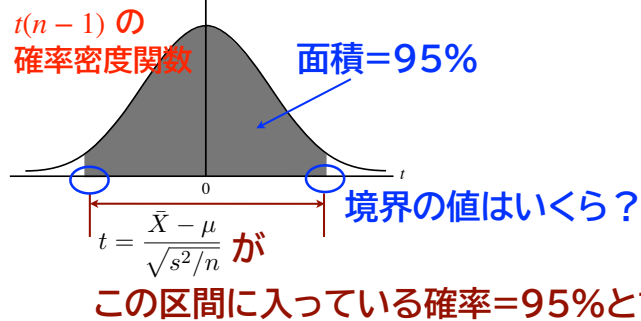
自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう
 $t(n-1)$

(「スチューデントのt分布」という)

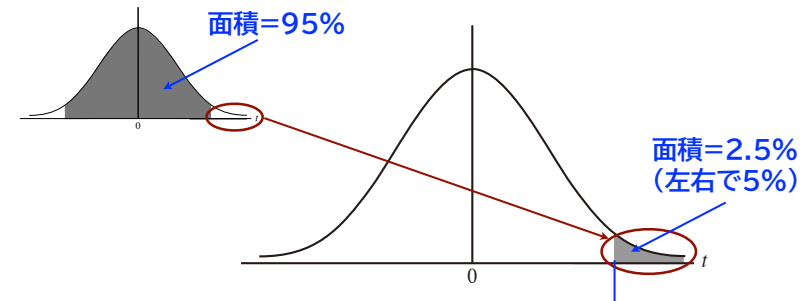
発見者ウィリアム・ゴセットのペンネーム

t分布を用いた区間推定

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ は自由度 $(n-1)$ の t分布にしたがう
 $t(n-1)$

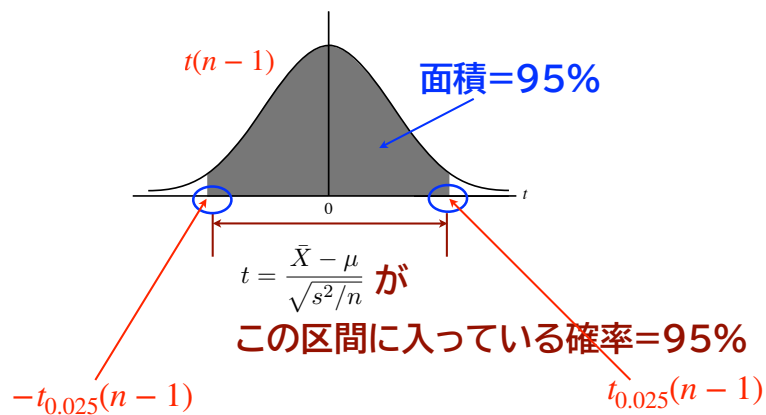


t分布を用いた区間推定



境界の値は自由度によってちがうので
 $t_{0.025}(n-1)$ としておく [上側2.5%点]

t分布を用いた区間推定



t分布を用いた区間推定

$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}}$ が $-t_{0.025}(n-1)$ と $t_{0.025}(n-1)$
 の間に入っている確率が95%

式で書くと $P\left(-t_{0.025}(n-1) \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq t_{0.025}(n-1)\right) = 0.95$

μ の式に直すと

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1)\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) = 0.95$$

前回のテキストの例題

$$P\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1) \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0.025}(n-1) \frac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

標本平均=50 不偏分散=25 標本サイズ=10

$t_{0.025}(10-1) = 2.262$

μ の95% μ の95%

信頼区間の下限 信頼区間の上限

で、信頼区間を求めるのは、今日の本題ではありません。

t分布と検定

t分布と検定:例題

10人の実験協力者に、
薬Aを与えた場合と薬Bを与えた場合とで、それぞれある検査を行うと、
その結果の数値は次の表の通りとなりました。

このとき、

薬Bは、薬Aよりも、検査の数値を高くする働きがあるといえるでしょうか？

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66

t分布と検定:例題

問題は、

それぞれの実験協力者について、
薬Aと薬Bで数値がどう変化しているか。

各実験協力者について、
(薬Bでの数値) - (薬Aでの数値) を求める

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	-2	-2	5	3	-2	2	3	3	6

t分布と検定:例題

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	-2	-2	5	3	-2	2	3	3	6

薬Bでの数値のほうが高い(+)

薬Aでの数値のほうが高い (-)

どちらの実験協力者もいる

差の平均値について

「薬Bでの数値のほうが高い」か？

「本質的な差」

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	-2	-2	5	3	-2	2	3	3	6

10人の実験協力者について、差の平均値は +2

薬Bでの数値のほうが高い

その差は、
偶然生じたものではなく
「本質的な」差なのか？

「本質的」とは？
仮に全人類が薬を飲んだとしても
薬Bでの数値のほうが高い

検定で考える

1. 母集団(ここでは、世界のすべての患者)については

「薬Aと薬Bでの差」の平均は0

と仮説を設定する。

つまり、「本質的な差はない」という仮説を設定する。

検定で考える

1. 「母集団(ここでは、世界のすべての患者)については
『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり、「本質的な差はない」という仮説を設定する。

2. 実験協力者は、母集団から無作為抽出された、
10人からなる標本と考える。

検定で考える

- 1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり, 「本質的な差はない」という仮説を設定する。
2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる**標本**と考える。

3.
実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

検定で考える

- 1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり, 「本質的な差はない」という仮説を設定する。
2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる**標本**と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。

4.
実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が,
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

検定で考える

- 1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり, 「本質的な差はない」という仮説を設定する。
2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる**標本**と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。
4. 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が,
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。

5.その確率が小さければ,
「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。
すなわち, 「本質的な差はない」という当初の仮説は誤りと結論する。

検定で考える

- 1.「母集団(ここでは, 世界のすべての患者)については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」と仮説を設定する。
つまり, 「本質的な差はない」という仮説を設定する。
2. 実験協力者は, 母集団から無作為抽出された, 10人からなる**標本**と考える。
3. 実験協力者10人での「薬Aと薬Bでの差」の平均値を求める。
4. 実験協力者10人について求められた「薬Aと薬Bでの差」が,
「本質的な差はない」はずの母集団から無作為抽出されたときに
偶然生じる確率を求める。
- 5.その確率が小さければ, 「こんな差が偶然生じるとは思わない」と考える。
すなわち, 「本質的な差はない」という当初の仮説は誤りと結論する。

くじ引き🎰の例で
いえば?

本当に半分当たると
考える

くじを10回引いたら
全部はずれ

10回全部はずれる
確率は約0.001

確率がとても小さい
ので, 「半分当たる」
は間違いと考える

この論理を**仮説検定(検定)**という

例題に検定で答える

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	-2	-2	5	3	-2	2	3	3	6

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

母集団全体での「薬Aと薬Bでの差」は、平均 μ の正規分布にしたがうと考える

標本サイズを n (例題では10)

標本平均を $\bar{X}$ (例題では、10人の実験協力者における差の平均値で、+2)

不偏分散を s^2 (例題では、10人の実験協力者についての不偏分散で、8.89)

$$t\text{統計量 } t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \text{ は、自由度}(n-1)\text{の}t\text{分布にしたがう}$$

例題に検定で答える

実験協力者番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
薬 A	60	65	50	70	80	40	30	80	50	60
薬 B	64	63	48	75	83	38	32	83	53	66
差	4	-2	-2	5	3	-2	2	3	3	6

薬Bでの数値のほうが
「本質的に」高いか？

標本サイズを n (例題では10)

標本平均を $\bar{X}$ (例題では、10人の実験協力者における差の平均値で、+2)

不偏分散を s^2 (例題では、10人の実験協力者についての不偏分散で、8.89)

$$t\text{統計量 } t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \text{ は、自由度}(n-1)\text{の}t\text{分布にしたがう}$$

「母集団については『薬Aと薬Bでの差』の平均は0」という仮説
→ $\mu = 0$

例題に検定で答える

標本サイズを n (例題では10)

標本平均を $\bar{X}$ (例題では、10人の実験協力者における差の平均値で、+2)

不偏分散を s^2 (例題では、10人の実験協力者についての不偏分散で、8.89)

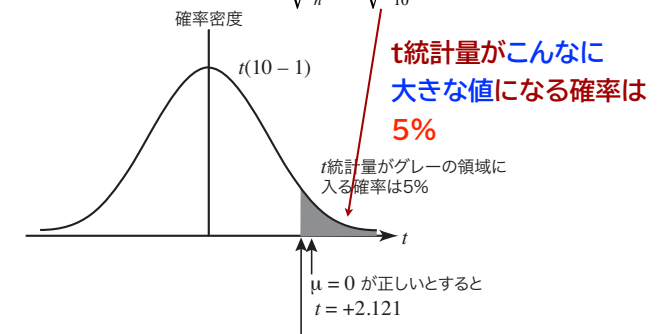
仮説より、 $\mu = 0$

このとき、 t 統計量は

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$$

t統計量 = +2.121 の意味

仮説が正しいとすると、 t 統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$



自由度(10-1)のt分布の上側5%点 $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

仮説は間違っている, と考える

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

そんな小さな確率でしか起きないはずのことが
起きているのは不自然

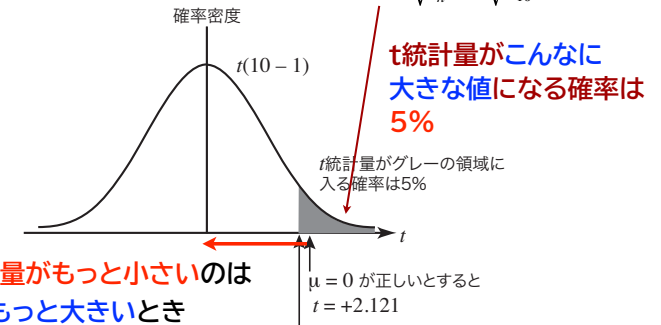
仮説が間違っている と考える



10回全部外れる確率は約0.001
そんな確率でしか起きないはずの
ことが起きているのは不自然

では, どのような結論なら

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$



それなら起きる確率は5%より大きい $t_{0.05}(10-1) = +1.8331$

仮説は間違っている, と考える

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$
 $\mu = 0$

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

仮説が間違っている と考える

本当は、 μ はもっと大きいと考える
 $\mu > 0$

薬Bでの数値のほうが高い, と考える

検定の言葉...

検定の言葉

[帰無仮説] $H_0: \mu = 0$

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

[有意水準]

t統計量がこんなに大きな値になる確率は5%

仮説が間違っていると考え、帰無仮説を[棄却]する

[対立仮説] $H_1: \mu > 0$

本当は、 μ はもっと大きいと考える
 $\mu > 0$

対立仮説を[採択]する

偶然とは思わない

[有意]である

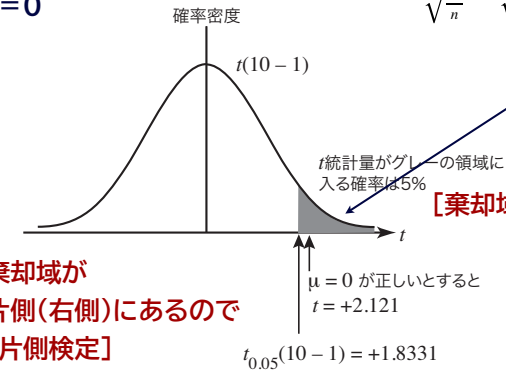
薬Bでの数値のほうが高い、と考える

検定の言葉

[検定統計量]

仮説が正しいとすると、t統計量 $t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{\frac{8.89}{10}}} = +2.121$

$\mu = 0$



t統計量がこんなに大きな値になる確率は5% **[棄却域に落ちる]**

[棄却域]

棄却域が片側(右側)にあるので **[片側検定]**

続いて、ウェブサイトのリンク先を説明します