

2026年度秋学期

応用数学(解析)

第1部・「無限」の理解 /

第2回

無限にも大小がある



関西大学総合情報学部
浅野 晃

無限とは、「モノ」ではなく「コト」🤔

「 ∞ 」という数字があるのか

「 ∞ 」という数字はありません

無限とは

「無限」という「モノ」があるのではなく

「無限であるコト」

数学では、

「コト」ではなく「モノ」のほうが扱いやすい。

「無限」を具体的な数字で扱うには？

「数えられる」無限

1, 2, 3, ... ← そして、「無限」

自然数とは、数えるための数字

自然数の集合と同じ無限を

「数えられる無限」すなわち[可算無限]という

その「個数」は[可算基数] $\aleph_0$ (アレフゼロ)

(よく「可算無限個」という)

どうやって数えるのか

自然数と対応がつく集合は数えられる

自然数 $1, 2, 3, \dots$
集合 $A = \{a, b, c, \dots\}$

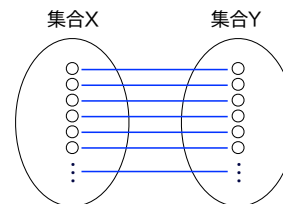
過不足なく1対1対応がつく
([全単射]が存在する)なら

この集合の[基数]([濃度])は $\aleph_0$

[可算無限集合]という

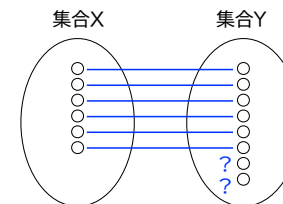
「全単射」について

集合の要素間の対応関係について



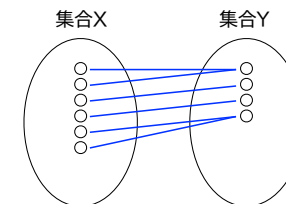
[全単射](bijection)

1対1に対応し、
X, Y どちらにも余りがない



XからYへの
[単射](injection)

1対1である
この例では
Yに余りがあるので全射ではない



XからYへの
[全射](surjection)

どちらにも余りはない
この例では
1対1ではないので単射ではない

偶数の集合の濃度は

偶数と自然数とは対応がつくか

自然数 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
偶数 $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$

過不足なく1対1対応がつく(全単射が存在する)

偶数の基数も $\aleph_0$

自然数と「個数」は同じ

「ホテル無限」

ヒルベルトの「ホテル無限」

ホテル無限には、可算無限個の部屋がある

「ただいま満室です」



さらに客が一人やって来たら？

部屋にいる客全員が
隣の部屋に移れば
1号室が空く



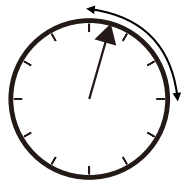
実数の基数と対角線論法 🤔

時計の針の止まる場所

連続的に針が進む時計

ボタンを押すと、その場で針が止まる

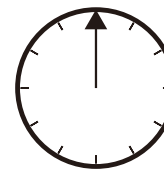
目をつぶってボタンを押したとき



12時から3時の間のどこかに止まる確率
= 円周の1/4だから、確率も1/4

時計の針の止まる場所

では「12時ちょうど」に止まる確率は？



「12時ちょうど」の幅はゼロ
→そこに止まる確率もゼロ

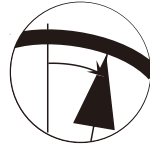
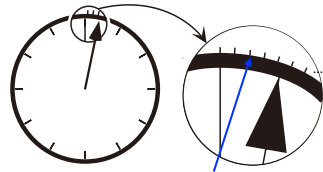
12時ちょうども 1時ちょうども 12時1秒ちょうども どこでもみんなゼロ

なら、「12時から3時の間のどこか」もゼロじゃないの？ 🤔

何がおかしいのか

各刻みに止まる確率はどれもゼロ

区間内の任意の位置
= 1つの実数で表される角度



刻みがどんなに細かくても、
順に自然数の番号がつけられる

角度を表す実数と1対1対応がつかなら、
「区間内のどの位置に止まる確率も0」

自然数と実数に一対一対応がつかか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

実数は可算無限ではない

自然数と実数に一対一対応がつかか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

いいえ。🙅

実数を1つ、2つ、3つと数えることはできない

実数も自然数もその「個数」は無限だが、
実数は自然数よりも本質的に大きな無限

カントールの対角線論法

仮に、すべての実数を1番、2番、…と番号をつけて並べられるとする

1番 0.1 2 3 4 5 6 ...
2番 0.8 9 3 1 2 9 ...
3番 0.2 3 0 4 9 0 ...
⋮

0.190... 対角線上の数字を並べた実数をつくる

0.201... 各ケタを1ずつずらす

カントールの対角線論法

すべての実数を1番、2番、…と番号をつけて並べた表

1番 0.1 2 3 4 5 6 ...
2番 0.8 9 3 1 2 9 ...
3番 0.2 3 0 4 9 0 ...
⋮

各ケタを
1ずつずらした数

0.2 0 1 ...

この数は、

1番の数字とは1ケタめで、
2番の数字とは2ケタめで、
n番の数字とはnケタめで

1だけずれているので、
「すべての実数を並べた」はずの表にない

一般に
「集合Aのべき集合(Aのすべての部分集
合の集合)はAよりも大きな濃度をもつ」

つまり、「実数は可算基数 $\aleph_0$ よりも
大きな濃度をもつ」

ホテル無限に, 無限の客 (演習問題2)

問題2

ホテル無限には, 可算無限個の部屋がある

「ただいま満室です」



さらに $\aleph_0$ 可算無限人の客がやって来たら？

部屋にいる客全員が
2倍の番号の部屋に移れば
奇数番の室が空く



奇数も可算無限個

今日のまとめ

「可算無限」

無限にも, 大小がある

こういうことが不思議だと感じるのは,
ふだんは「無限」を, たかだか「大きな数」くらいにしか理解していないから🤔

ハレー彗星が関心をよぶのは, 周期76年が「人の一生」とほぼ同じだから
それより周期の長い彗星はたくさんあるが, 人は実感できない

次回は, 「実数」とは何か,
実数の連続性(「べったり」並んでいること)を説明します。