2026 年度秋学期　応用数学（解析）　第５回演習の解答例

1. 与式より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3t^2x\\ \frac{dx}{x} &= 3t^2dt\\ \int\frac{dx}{x} &= \int 3t^2dt\\ \log|x| &= t^3+C\ (C\text{ は定数})\\ x &= \pm e^Ce^{t^3}.\end{aligned}\tag{A1}$$

よって，$\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと，一般解は $x=Ae^{t^3}$ となります。初期値は $x(0)=1$ ですから，$t=0, x=1$ を代入すると $1=A$ となり，特殊解は $x=e^{t^3}$ となります。■

2. 与式より

$$\begin{aligned}t\frac{dx}{dt} &= ax\\ \frac{dx}{x} &= \frac{a}{t}dt\\ \int\frac{dx}{x} &= \int\frac{a}{t}dt\\ \log|x| &= a\log|t|+C\ (C\text{ は定数})\\ \log|x| &= \log(|t|^a)+C\\ x &= \pm e^Ct^a.\end{aligned}\tag{A2}$$

よって，$\pm e^C$ をあらためて定数 A とおくと，一般解は $x=At^a$ となります。初期値は $x(1)=1$ ですから，$t=1, x=1$ を代入すると $1=A$ となり，特殊解は $x=t^a$ となります。■

3. 与式より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+ax+b &= 0\\ dx &= -(ax+b)dt\\ -\frac{dx}{ax+b} &= dt\\ -\int\frac{dx}{ax+b} &= \int dt\\ -\frac{1}{a}\log|ax+b| &= t+C\ (C\text{ は定数})\\ \log|ax+b| &= a(-C-t)\\ ax+b &= \pm e^{-aC}e^{-at}\\ x &= \pm\frac{e^{-aC}}{a}e^{-at}-\frac{b}{a}\end{aligned}\tag{A3}$$

よって，$\pm\dfrac{e^{-aC}}{a}$ をあらためて定数 A とおくと一般解は $x=Ae^{-at}-\dfrac{b}{a}$ となります。初期値は $x(0)=\dfrac{1-b}{a}$ ですから，これを代入すると $\dfrac{1-b}{a}=A-\dfrac{b}{a}$ より $A=\dfrac{1}{a}$ で，特殊解は $x=\dfrac{e^{-at}-b}{a}$ となります。■