2026年度秋学期

応用数学(解析)

第2部・基本的な微分方程式 ／

第6回
変数分離形の変形



関西大学総合情報学部
浅野 晃

変数分離形(復習)🤔

変数分離形

一般には $g(x)x' = f(t)$

$x' = \dfrac{dx}{dt}$ とすると $g(x)dx = f(t)dt$

両辺それぞれを積分すると $\displaystyle\int g(x)dx = \int f(t)dt + C$

一般解に含まれる積分定数 C は,
初期値を代入して定まり, 特殊解が得られる

今日は, 変形によって変数分離形に持ち込める方程式です

1. 同次形🤔

同次形

一般には $\frac{dx}{dt} = f(\frac{x}{t})$ x/t の式になっている

$\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ この両辺を微分 $\frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u$

積の微分

よって $t\frac{du}{dt} + u = f(u)$

$\frac{1}{f(u) - u}du = \frac{1}{t}dt$ 変数分離形になった

同次関数

関数 $M(x,t)$ が k 次の同次関数であるとは

$M(ut,t) = t^k M(u,1)$ の形になっていること t^k をくくり出せる

微分方程式が $\frac{dx}{dt} = \frac{M(x,t)}{N(x,t)}$ の形で

M, N がどちらも k 次の同次関数なら，$x = ut$ とおいて

$$\frac{dx}{dt} = \frac{M(x,t)}{N(x,t)}$$
$$= \frac{t^k M(u,1)}{t^k N(u,1)} = \frac{M(u,1)}{N(u,1)} = \frac{M(\frac{x}{t},1)}{N(\frac{x}{t},1)}$$

前ページの形になる

例題

$x' = \frac{t-x}{t+x}$ を解いて，一般解を求めよ。

分母分子を t でわると $\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}}$ 【同次形】

$\frac{x}{t} = u$ とおくと $x = ut$ より $\frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u$

よって $t\frac{du}{dt} + u = \frac{1-u}{1+u}$

$\frac{1}{\frac{1-u}{1+u} - u}du = \frac{1}{t}dt$ t と u を分離

$\frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{1}{t}dt$

例題(続き)

$x' = \frac{t-x}{t+x}$ を解いて，一般解を求めよ。

微分の関係になっている $\frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{1}{t}dt$

ここで $u^2 + 2u - 1$ の微分が $2(u+1)$ になるから，上の式の両辺を積分すると

$\frac{1}{2}\log(|u^2+2u-1|) = -\log|t| + C$ 対数の和 → 真数の積

$\log(|u^2+2u-1|) = \log(A|t|^{-2})$ 対数の○倍 → 真数の○乗

$t^2(u^2+2u-1) = A$

定数は任意なので，絶対値が外れる

$u = \frac{x}{t}$ に戻すと $x^2 + 2tx - t^2 = A$

2. 1階線形🤔

1階線形微分方程式

一般には $\dfrac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$ **の形になっているもの**

$p(t)=\exp\left(\int P(t)dt\right)$ **とおくと，一般解は** $x=\dfrac{1}{p(t)}\left(\int p(t)Q(t)dt+C\right)$

なぜならば

$$
\begin{aligned}
(p(t)x)' &= (p(t))'x+p(t)x' && \text{積の微分}\\
&= \left[\exp\left(\int P(t)dt\right)\right]' x+p(t)x'\\
&= p(t)P(t)x+p(t)x' && \text{指数の合成関数の微分}\\
&= p(t)\left\{P(t)x+x'\right\}=p(t)Q(t)
\end{aligned}
$$

よって，両辺を積分して $p(t)x=\int p(t)Q(t)dt+C$

例題

$x'+x=t$ **を解いて，一般解を求めよ。**

$\dfrac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)$ **にあてはめると** $P(t)\equiv 1,\ Q(t)=t$

よって $p(t)=\exp\left(\int P(t)dt\right)$ **とすると** $p(t)=\exp\left(\int 1dt\right)=e^{t+C_1}=e^{C_1}e^t=C_2e^t$

前ページの式から $p(t)x=\int p(t)Q(t)dt+C$

$$C_2e^tx=\int C_2e^ttdt+C_3$$

$\dfrac{C_3}{C_2}=C$ ⟶ $e^tx=\int e^ttdt+C$

部分積分 $=e^tt-\int e^tdt+C$

$=e^tt-e^t+C$

よって

$$x=t-1+Ce^{-t}$$

2′．ベルヌーイの微分方程式🤔

ベルヌーイの微分方程式

一般には $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^n$ **の形** $(n \neq 1)$

$u = x^{1-n}$ **とおくと1階線形微分方程式に変形できる**

なぜならば

$\frac{1}{x}x' + P(t) = Q(t)x^{n-1}$

$\log u = (1-n)\log x$

両辺を微分する

代入

$\frac{u'}{u} = (1-n)\frac{x'}{x}$

$\frac{1}{1-n}\frac{u'}{u} + P(t) = Q(t)\frac{1}{u}$

$u' + (1-n)P(t)u = (1-n)Q(t)$ **1階線形**

例題

$x' + tx = tx^2$ **が1階線形微分方程式で表せることを示せ。**

$u = x^{-1}$ **とおく**

両辺の対数をとると $\log u = -\log x$

両辺を t **で微分すると** $\frac{u'}{u} = -\frac{x'}{x}$

両辺を x **で割ると** $\frac{x'}{x} + t = tx$

$-\frac{u'}{u} + t = \frac{t}{u}$ $\xrightarrow{-u \text{ 倍}}$ $u' - tu = -t$ **1階線形**

演習問題の解説🤔

演習問題(1)

$x' = \frac{x-t}{2t}$ **の一般解を求めよ**

与式の右辺の分母分子を t **で割ると,** $x' = \frac{\frac{x}{t} - 1}{2}$ **となるので,**
同次形の微分方程式

$\frac{x}{t} = u$ **とおくと** → $\frac{dx}{dt} = \frac{u-1}{2}$

$x = ut$ **なので** $\frac{dx}{dt} = t\frac{du}{dt} + u$ → $t\frac{du}{dt} + u = \frac{u-1}{2}$

演習問題(1)(続き)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$t\dfrac{du}{dt} + u = \dfrac{u-1}{2}$ より $t\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u+1}{2}$ なので

$\dfrac{du}{u+1} = -\dfrac{dt}{2t}$ と変数分離できる

両辺を積分すると $\displaystyle\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$

演習問題(1)(続き)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$\displaystyle\int \frac{du}{u+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$ より

$\log|u+1| = -\dfrac{1}{2}\log|t| + C$ (C は定数)

$\log|t|^{-\frac{1}{2}}$ と表せる　$\log e^C$ と表せる

$u+1 = \pm e^C |t|^{-\frac{1}{2}}$

$\pm e^C = A$ とおくと $u+1 = A|t|^{-\frac{1}{2}}$

演習問題(1)(続き)

$x' = \dfrac{x-t}{2t}$ の一般解を求めよ

$u+1 = A|t|^{-\frac{1}{2}}$ より $u = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$

$u = \dfrac{x}{t}$ とおいていたので, これを代入すると $\dfrac{x}{t} = -1 + A\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$

すなわち, 一般解は $x = -t + A\sqrt{|t|}$

演習問題(2)

$tx' - x = 1$ の一般解を求めよ

与式より $x' - \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{t}$

1階線形方程式の一般形 $x' + P(t)x = Q(t)$ にあてはめると　$P(t) = -\dfrac{1}{t}$, $Q(t) = \dfrac{1}{t}$

$p(t) = \exp\displaystyle\int P(t)dt$ とおくと,

$$\begin{aligned} p(t) &= \exp(-\int \tfrac{1}{t}dt) \\ &= \exp(-\log t + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1}) + C_1) \\ &= \exp(\log t^{-1})\exp(C_1) \\ &= C_2\frac{1}{t} \end{aligned}$$

(C_1, C_2 は定数)

演習問題(2)(続き)

$tx' - x = 1$ の一般解を求めよ

$p(t)x = \int p(t)Q(t)dt + C$ となることから（C は定数）　$Q(t) = \frac{1}{t}$ より

$$C_2\frac{1}{t}x = \int C_2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}dt + C_3$$

$$\frac{1}{t}x = \int \frac{1}{t^2}dt + C_4 \qquad (C_3, C_4, C \text{ は定数})$$

$$\frac{1}{t}x = -\frac{1}{t} + C$$

$$x = -1 + Ct$$

すなわち，一般解は $x = -1 + Ct$

今日のまとめ

同次形
1階線形
ベルヌーイ