第２部・基本的な微分方程式／　２階線形微分方程式（２）

非斉次形２階線形微分方程式

前回, $x(t)$ についての定数係数の斉次形２階線形微分方程式, すなわち $x''+ax'+bx=0$ (a,b は定数) を解く方法を説明しました。今回は, 定数係数の非斉次形２階線形微分方程式, すなわち $x''+ax'+bx=R(t)$ を解く方法を説明します。

非斉次形線形微分方程式については，次の定理がなりたちます。ここで，n 階線形微分方程式を，前回示したベクトルと行列を用いた方法で $\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t)$ と表します。

非斉次形線形微分方程式

$$\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t) \tag{1}$$

の任意の特殊解を $\boldsymbol{x}_p(t)$ とし，上の方程式で $\boldsymbol{b}(t)\equiv 0$ とおいた斉次形方程式

$$\boldsymbol{x}'=A(t)\boldsymbol{x} \tag{2}$$

の一般解を $\boldsymbol{x}_h(t)$ とするとき，(1) 式の非斉次形方程式の一般解は

$$\boldsymbol{x}_s(t)=\boldsymbol{x}_h(t)+\boldsymbol{x}_p(t) \tag{3}$$

と，両者の和で表される。

(証明) まず，(3) 式の $\boldsymbol{x}_s(t)$ が実際に (1) 式の方程式の解であることを示すため，(1) 式の右辺に代入すると，

$$\begin{aligned}
&A(t)\boldsymbol{x}_s(t)+b(t)\\
&=A(t)\left(\boldsymbol{x}_h(t)+\boldsymbol{x}_p(t)\right)+b(t)\\
&=\left(A(t)\boldsymbol{x}_h(t)\right)+\left(A(t)\boldsymbol{x}_p(t)+b(t)\right)\\
&=\left(\boldsymbol{x}_h(t)\right)'+\left(\boldsymbol{x}_p(t)\right)'=\left(\boldsymbol{x}_s(t)\right)'
\end{aligned} \tag{4}$$

となるので，$\boldsymbol{x}_s(t)$ はたしかに (1) 式の方程式の解です。

問題は，この $\boldsymbol{x}_s(t)$ が本当にすべての特殊解を網羅した一般解になっているかどうかです。そのためには，どんな初期値に対する解でも (3) 式の形で表せることが示されればよいわけです。

非斉次形方程式（(1) 式）の任意の初期値を $\boldsymbol{x}_s(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ とします。このとき，(2) 式の斉次形方程式の初期値として

$$\boldsymbol{x}_h(t_0)=\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_p(t_0) \tag{5}$$

を選ぶことにします。前回の講義で示したとおり，線形微分方程式の解は一意です。よって，(2) 式の斉次形方程式の初期値として (5) 式のものを選ぶと，その特殊解でこの初期値をみたすものはただひとつ存在します。

(5) 式を (3) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_s(t_0) &= \boldsymbol{x}_h(t_0) + \boldsymbol{x}_p(t_0) \\ &= (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_p(t_0)) + \boldsymbol{x}_p(t_0) \\ &= \boldsymbol{x}_0\end{aligned} \tag{6}$$

となります。すなわち，(1) 式の非斉次形方程式の初期値 $\boldsymbol{x}_0$ が何であっても，(2) 式の斉次形方程式の初期値を (5) 式のとおりに選べば，(1) 式の非斉次形方程式の特殊解は (3) 式の形で表されることがわかります。■

２階線形微分方程式の場合は，この定理は

> 非斉次形２階線形微分方程式 $x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$ の一般解は，この方程式の任意の特殊解 $x_p(t)$ と，この方程式に対応する斉次形方程式 $x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$ の一般解 $x_h(t)$ の和 $x_h(t) + x_p(t)$ で表される。

と表されます。

定数係数の非斉次形２階線形微分方程式を解く

前節の定理にもとづいて非斉次形２階線形微分方程式を解くには，まず「非斉次形の方程式の特殊解を何とかしてひとつ見つけてくる」必要があります。どうやって見つけるか，それははっきり言って「勘」です。そう言ってしまっては数学としてはあんまりなので，いくつかパターンがあります。例題を通してみてみましょう。

例題

関数 $x(t)$ についての次の２階線形微分方程式の一般解を求めてください。

1. $x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 3t - 2$
2. $x'' + 2x' - 3x = e^{2t}$
3. $x'' + 2x' - 3x = 2\cos t$

(回答例)
1. 特殊解を求めるため，$x = at^2 + bt + c$ と見当をつけて与式に代入してみると

$$\begin{aligned}2a + 2(2at + b) - 3(at^2 + bt + c) &= 3t^2 + 3t - 2 \\ -(3a + 3)t^2 + (4a - 3b - 3)t + (2a + 2b - 3c + 2) &= 0\end{aligned} \tag{7}$$

となり，これが t にかかわらずなりたつことから

$$\begin{cases} 3a + 3 & = 0 \\ 4a - 3b - 3 & = 0 \\ 2a + 2b - 3c + 2 & = 0 \end{cases} \tag{8}$$

がなりたち，これを解くと $a=-1,\ b=-\dfrac{7}{3},\ c=-\dfrac{14}{9}$ となります。よって，$x=-t^2-\dfrac{7}{3}t-\dfrac{14}{9}$ がひとつの特殊解です。

一方，対応する斉次形の方程式は $x''+2x'-3x=0$ で，特性方程式 $\lambda^2+2\lambda-3=0$ の解は $\lambda=1,-3$ ですから，斉次形の方程式の一般解は C_1,C_2 を定数として $x=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}$ です。

以上から，与方程式の一般解は $x=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}-t^2-\dfrac{7}{3}t-\dfrac{14}{9}$ となります。■

2. 特殊解を求めるため，$x=ae^{2t}$ と見当をつけて与式に代入してみると，

$$\begin{aligned} 4ae^{2t}+2\cdot 2ae^{2t}-3ae^{2t}&=e^{2t}\\ 5ae^{2t}&=e^{2t}\end{aligned} \tag{9}$$

となり，これが t にかかわらずなりたつことから $a=\dfrac{1}{5}$ となります。

一方，対応する斉次形の方程式は前問と同じく $x''+2x'-3x=0$ で，一般解は C_1,C_2 を定数として $x=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}$ です。以上から，与方程式の一般解は $x=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}+\dfrac{1}{5}e^{2t}$ となります。■

3. 特殊解を求めるため，$x=A\cos t+B\sin t$ と見当をつけて与式に代入してみると，

$$\begin{aligned} (-A\cos t-B\sin t)+2(-A\sin t+B\cos t)-3(A\cos t+B\sin t)&=2\cos t\\ (-A+2B-3A-2)\cos t+(-B-2A-3B)\sin t&=0\\ (-4A+2B-2)\cos t+(-2A-4B)\sin t&=0\end{aligned} \tag{10}$$

となります。$\cos t$ と $\sin t$ は独立なので，この式から

$$\begin{cases} -4A+2B-2 &=0\\ -2A-4B &=0\end{cases} \tag{11}$$

がなりたち，これを解くと $A=-\dfrac{2}{5},\ B=\dfrac{1}{5}$ となります。よって，$x=-\dfrac{2}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\sin t$ がひとつの特殊解です。

一方，対応する斉次形の方程式は前問と同じく $x''+2x'-3x=0$ で，一般解は C_1,C_2 を定数として $x=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}$ です。以上から，与方程式の一般解は $x=C_1e^{t}+C_2e^{-3t}-\dfrac{2}{5}\cos t+\dfrac{1}{5}\sin t$ となります。■

これらの方法は，特殊解の関数形に見当をつけて，代入してみて係数を求めるもので，**未定係数法**といいます。

Wronski 行列式 (Wronskian) について

ここまでの説明で，関数が 1 次独立であるかどうかを判定する方法を，あまりきちんと説明していませんでした。ここで，少しだけそれに触れておきます。

関数 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が 1 次独立であるとは，

$$C_1x_1(t)+C_2x_2(t)=0 \tag{12}$$

がすべての t についてなりたつならば $C_1 = C_2 = 0$ である，ということでした。そこで，この式を t で微分すると $C_1 x_1'(t) + C_2 x_2'(t) = 0$ ですから，これらを合わせて行列を使って書くと

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

となります。この方程式が $C_1 = C_2 = 0$ 以外の解をもつのは，上の式の行列に逆行列が存在しないときだけです。よって，

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \not\equiv 0 \tag{14}$$

ならば, $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は 1 次独立です。上の式の行列式を **Wronski（ロンスキー）行列式**または **Wronskian** といいます。関数がいくつあっても，微分の階数が増えるだけで，考え方は同じです。

問題

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式の一般解を求めてください。

1. $x'' + x' - 2x = t + 1$
2. $x'' + 2x' + x = e^t$
3. $x'' + x = \cos 2t$

参考文献

水田義弘，詳解演習　微分積分，サイエンス社，1998. ISBN4-7819-0891-8
水野克彦編，基礎課程　解析学，学術図書，1985. ISBN978-4-8736-11075