2026 年度秋学期　応用数学（解析）　第９回

演習問題

過去の試験問題から選んだものです。参考文献からとった問題もあります。

実数の定義・数列の収束に関して

次の各問に答えよ。

1. 「可算無限」とは何かを説明せよ。
2. 数の「稠密性」と「連続性」の違いを説明せよ。
3. 実数の連続性の定義をひとつあげよ。
4. 数列 $a_n = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ は $n \to \infty$ で 0 に収束することを，$\varepsilon - N$ 論法で示せ。

微分方程式について

関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を解け。ただし，初期値が指定されている場合はその初期値を満たす特殊解を，そうでない場合は一般解を求めよ。

1. $tx' - x = 1$
2. $x'' + 2x' + x = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$
3. $x'' + 2x' - 3x = 3t^2 + 2t - 3,\ x(0) = x'(0) = 0$
4. $x'' + x = \cos 2t,\ x(0) = x'(0) = 0$

参考文献

水田義弘，詳解演習　微分積分，サイエンス社，1998. ISBN4-7819-0891-8

解答例

実数の定義・数列の収束に関して

1. （講義第２回参照）
   無限集合が可算であるとは，その集合と自然数全体の集合とのあいだに全単射が存在することをいいます。全単射とは，「過不足なく１対１に対応する」対応関係をいいます。

2. （講義第３回参照）

   - **数の稠密性**　どの２つの数をとっても，その間に別の数が存在すること。
   - **数の連続性**　（デデキントの切断を使っていうと）数を「一方の組のどの数も，もう一方の組のどの数よりも小さくなるように２つの組に分け」たとき（この表現は，「境界」のことは言っていないことに注意），以下のどちらかであること。（最大と最小のどちらもない，ということは起こらない）
     - 小さい方の組に最大値があり，大きい方の組に最小値がない
     - 大きい方の組に最小値があり，小さい方の組に最大値がない

3. （講義第３回・第４回であげた４つの定義のうち，ひとつを答えてください。）

4. どんな $\varepsilon > 0$ に対しても，$N = (\dfrac{1}{\varepsilon}$以上の最小の整数$)$ とおくと，$|a_N| \leqq \varepsilon$ となる。よって，$n > N$ のとき，$\{a_n\}$ が単調減少だから $|a_n - 0| < \varepsilon$ となり，$\varepsilon - N$ 論法による収束の定義により $n \to \infty$ のとき $a_n \to 0$ となる。■

微分方程式について

1. 与式から変数分離を行うと，$x \neq -1$ の範囲で

$$\begin{aligned} t\frac{dx}{dt} - x &= 1 \\ t\frac{dx}{dt} &= x + 1 \\ \frac{dx}{x+1} &= \frac{dt}{t} \\ \log|x+1| &= \log|t| + C \ (C \text{ は定数}) \end{aligned} \tag{1}$$

   となり，さらに

$$\begin{aligned} |x+1| &= e^C|t| \\ x+1 &= \pm e^C t \end{aligned} \tag{2}$$

   となるので，定数 $\pm e^C$ をあらためて A とおくと，$x = At - 1$ という一般解が得られる。

   （なお，$x = -1$ のとき，定数 A すなわち $\pm e^C$ は 0 でないから，この解では $t = 0$ となる。問題の方程式は $t = 0, x = -1$ のときに成り立っているので，$x = -1$ のときもこの一般解に含めてよい。（この部分は，書かなくても試験では減点しないと思います））■

2. この方程式は斉次形２階線形微分方程式で，特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ と表せる。この特性方程式は $(\lambda + 1)^2 = 0$ と変形できて，重解 $\lambda = -1$ をもつ。よって，微分方程式の一般解は，C_1, C_2 を定数として $x = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$ である。

初期値 $x(0)=0$ であるから，一般解に $t=0$ を代入して $x=0$ とおくと，$C_1=0$ が得られる。また，$x'=-C_1e^{-t}+C_2(e^{-t}-te^{-t})$ であり，初期値 $x'(0)=1$ であるから，x' の式に $t=0, C_1=0$ を代入して $x=1$ とおくと，$x'(0)=C_2(1-0)=1$ より $C_2=1$ が得られる。よって，求める特殊解は $x=te^{-t}$ である。■

3. まず与えられた方程式の特殊解を求めるため，$x=at^2+bt+c$ と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} 2a+2(2at+b)-3(at^2+bt+c)&=3t^2+2t-3 \\ -3at^2+(4a-3b)t+(2a+2b-3c)&=3t^2+2t-3 \end{aligned} \tag{3}$$

が得られる。これが t によらずなりたつので，

$$\begin{cases} -3a & =3 \\ 4a-3b & =2 \\ 2a+2b-3c & =-3 \end{cases} \tag{4}$$

がなりたち，これを解くと $a=-1,\ b=-2,\ c=-1$ となる。

一方，対応する斉次形の方程式は $x''+2x'-3x=0$ で，特性方程式は $\lambda^2+2\lambda-3=0$ であり，その解は $\lambda=1,-3$ である。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-3t}$（C_1, C_2 は任意の定数）となる。

以上から，与方程式の一般解は $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-3t}-t^2-2t-1$ となる。

問題での初期値は，$t=0$ のとき $x(0)=x'(0)=0$ となっているので，一般解に代入すると $x(0)=C_1+C_2-1=0,\ x'(0)=C_1-3C_2-2=0$ となる。これらから $C_1=\dfrac{5}{4},\ C_2=-\dfrac{1}{4}$ となるので，求める特殊解は $x(t)=\dfrac{5}{4}e^t-\dfrac{1}{4}e^{-3t}-t^2-2t-1$ である。■

4. 特殊解を求めるため，$x=A\cos 2t+B\sin 2t$（A, B は定数）と見当をつけて与式に代入すると

$$\begin{aligned} (-4A\cos 2t-4B\sin 2t)+(A\cos 2t+B\sin 2t)&=\cos 2t \\ (-4A+A-1)\cos 2t+(-4B+B)\sin 2t&=0 \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。これが t によらずなりたつので，$A=-\dfrac{1}{3},\ B=0$ となる。

一方，対応する斉次形の方程式は $x''+x=0$ で，特性方程式は $\lambda^2+1=0$ となり，その解は $\lambda=\pm i$ である。よって，斉次形の方程式の一般解は $x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$（C_1, C_2 は任意の定数）となる。

以上から，与方程式の一般解は $x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t-\dfrac{1}{3}\cos 2t$ となる。問題での初期値は，$t=0$ のとき $x(0)=x'(0)=0$ となっているので，一般解に代入すると $x(0)=C_1-\dfrac{1}{3}=0,\ x'(0)=C_2=0$ となる。これらから $C_1=\dfrac{1}{3},\ C_2=0$ となるので，求める特殊解は $x(t)=\dfrac{1}{3}\cos t-\dfrac{1}{3}\cos 2t$ である。（なお，問題の方程式は左辺に x' を含まないから，最初から $x=A\cos 2t$ と見当をつけてもよい。こうすると，$x''=-4A\cos 2t$ であるから，これらを方程式に代入すると，$-4A\cos 2t+A\cos 2t=\cos 2t$ より $A=-\dfrac{1}{3}$ が得られる。）■