2026年度秋学期

画像情報処理

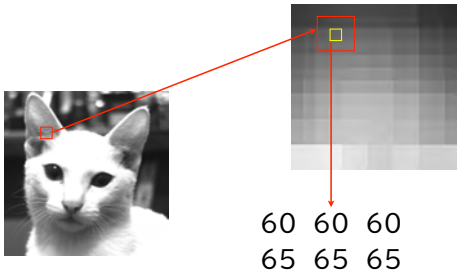
第1部・画像のサンプリングと周波数 ／

第2回
結像と空間周波数，フーリエ級数

関西大学総合情報学部
浅野 晃

第1部のトピック

標本化と量子化



60 60 60
65 65 65
70 70 70

画像は，離散的な点（画素，pixel）の集まりでできている
［標本化］

各画素は，明るさ（輝度）を表す整数である
［量子化］

空間周波数とフーリエ変換

標本化（サンプリング）・・・どのくらいの細かさで？
［空間周波数］

空間周波数を求めるのが
［フーリエ変換］

光による画像の生成

波の性質・回折と干渉

中国・銭塘江の「大海嘯」

こちらで見てみましょう

https://www2.nhk.or.jp/archives/tv60bin/detail/index.cgi?das_id=D0009010616_00000

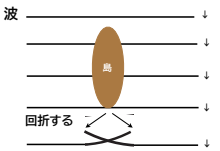
（ウェブサイトの「参考リンク」で，NHKアーカイブスのプレビューを見てください。最後のほうに，右の図のような交差する波が映ります）

波の「干渉」

山どうし・谷どうしが
重なり合うと強めあう

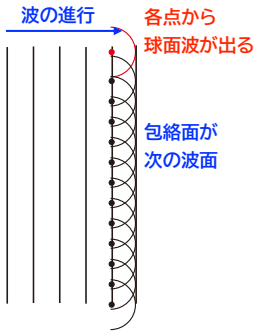
波の「回折」

島の裏側に
回り込む

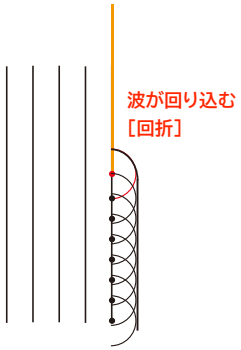


ホイヘンスの原理と波の回折

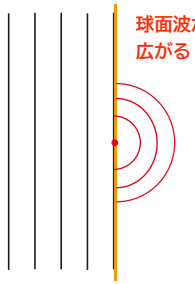
ホイヘンス（Huygens）の原理



障害物があると

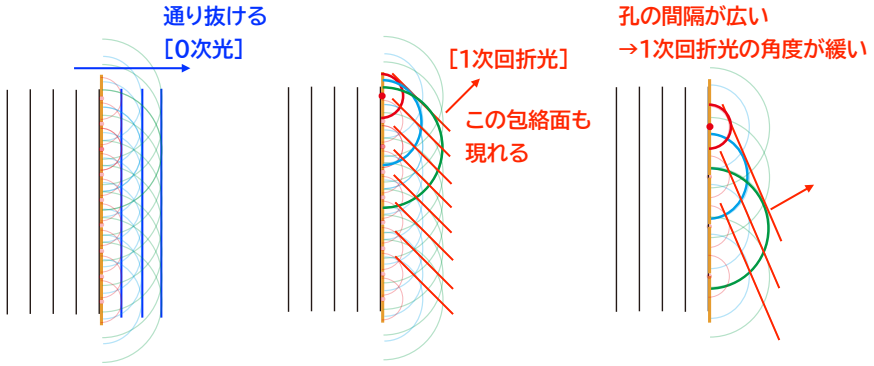


孔を通り抜けると



回折格子と1次回折光

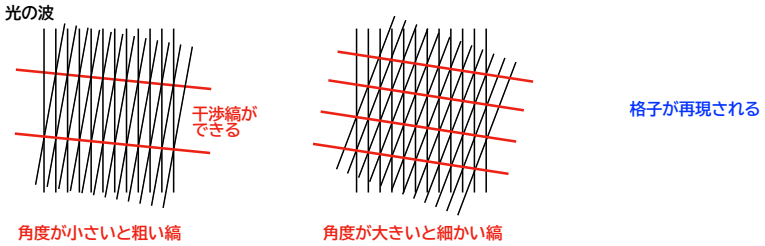
[回折格子] = 孔が周期的に開いている



光の干渉

回折光と0次光が重なると再び縞ができる

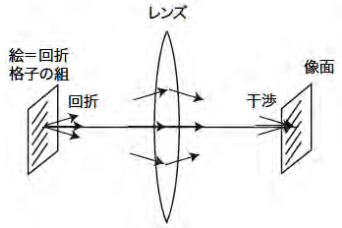
細かい格子ほど大きな角度で回折光が出るから，



画像の生成（結像）

画像は回折格子の重ね合わせであり，

それぞれの回折格子で回折された光が像面で干渉して，画像が再現される



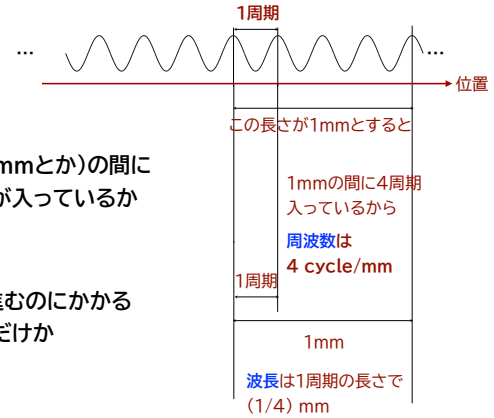
画像は回折格子，すなわち波の重ね合わせである

どんな波が重ね合わされているかを求める計算が[フーリエ変換]

空間周波数とフーリエ級数

波の周波数と波長

基本的な波
三角関数で表す

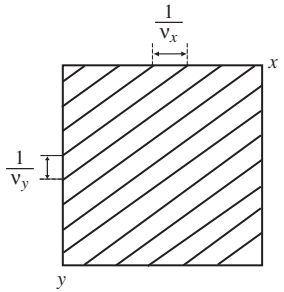


[周波数]
単位長さ（1mmとか）の間に
何周期の波が入っているか

[波長]
波が1周期進むのにかかる
長さはどれだけか

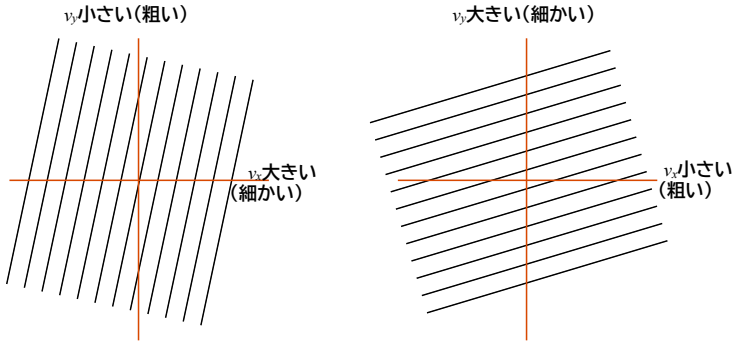
空間周波数

空間周波数＝
平面上の「明暗の波」の細かさを表す
単位長さの中で明暗が何回繰り返すか



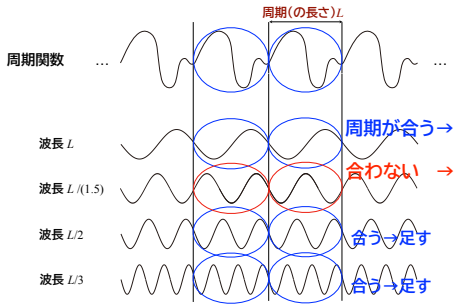
x方向・y方向の2つの空間周波数の組で，
ひとつの平面上の波が定まる

空間周波数



周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



もし，この周期関数が，三角関数の
和で書けるとしたら？

足されるのは，どの三角関数？

周期が合う→ 波が進んでも同期しているから足す

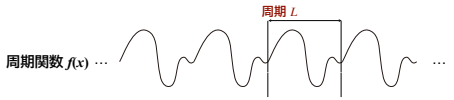
合わない → 波が進むとずれていってしまうから
足してはいけない

合う→足す

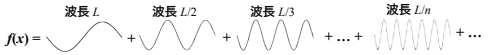
合う→足す

… 足されるのは波長 L / n（nは整数）のものに限る。
無限個の波の足し合わせだが，足し算（級数）で書ける。

「無限個だが，足し算で書ける」



周期関数 $f(x)$が，三角関数の和で書けるとしたら，足されるのは



… 足されるのは波長 L / n（nは整数）のものに限るから，
無限個の三角関数を足すのだけれども
このように「項」を並べることができる

「級数」という

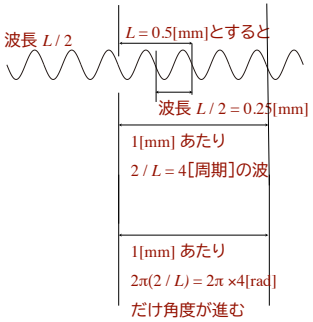
波の進み方を「角度」で表す

★三角関数を使うときは，角度を単位にしなければいけない

L / n 波長

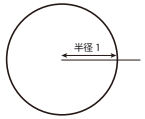
n / L 単位長さあたり
何周期ぶんの波が入っているか
［周波数］

$2\pi(n / L)$ 単位長さあたり
位相（角度）が何ラジアン進むか
［角周波数］



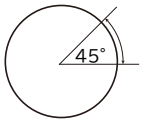
1周＝360度＝2πラジアン　　ラジアン？

ラジアン（弧度法）



半径1の円の
円周の長さは 2π

1周＝360度＝2πラジアン



この角度を，
対応する円周の長さで表す

45°＝ 1周の1/8 だから，
ラジアンであらわすと
$2\pi \times (1/8) = \pi / 4$ **(rad)**

周期関数＝三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + a_1\cos(2\pi\frac{1}{L}x) + a_2\cos(2\pi\frac{2}{L}x) + \ldots + a_n\cos(2\pi\frac{n}{L}x) + \ldots$$

波長 L　　波長 $L/2$　　波長 L/n

なのですが…

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

指数関数なら計算が簡単

$a^x a^y = a^{x+y}$　　かけ算＝指数の足し算

三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式　$\exp(i\omega) = \cos\omega + i\sin\omega$

$$\cos\omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2},\quad \sin\omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

$\exp(x) = e^x$　　$(e^x)' = e^x$　微分しても変わらない

$e = 2.71828\ldots$

ひとつの三角関数＝波は，
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが，
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

つづきは

波長 L / n の波は $\exp(i2\pi\frac{n}{L}x)$ と $\exp(-i2\pi\frac{n}{L}x)$ の組

周期 L の周期関数 $f(x)$ は, 波長 L / n の波を足し合わせて

プラスもマイナスも∞（プラスとマイナスの組で1つの波だから）

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi\frac{n}{L}x\right)$$

これがフーリエ級数なんですが,
この係数はどうやって求めるの？

という級数で書ける はず。

続きは次回。