

フーリエ級数

波の重ね合わせと級数

前回、波を指数関数で表すことを説明しました。これは、三角関数と指数関数の間にある

$$\cos \theta = \frac{\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)}{2} \quad (1)$$

という関係を用います。ここで、 $i\theta$ と $-i\theta$ のような関係の複素数の組を**複素共役**といいます。

このことから、「ひとつのコサイン関数で表される波は、指数関数を用いるときは、正負の2つの周波数の組で表現される」という関係が得られます。これを用いると、「関数 $f(x)$ を波の重ね合わせで表す」ことは、 $f(x)$ を次のような級数で表すことにあたります。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \quad (2)$$

これを「 $f(x)$ を次のような級数で表すことができる」というためには、それぞれの波、すなわち $\exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$ にかかっている、係数 a_n を求める方法が必要です。係数の求めるには、**直交関数系**という考え方を利用します。

内積と直交関数系

さて、上の指数関数には、「同じ基本周期の波をかけあわせて、周期 L にわたって積分したときは0にならず、異なる基本周期の波をかけあわせて積分すると0になる」という性質があります。なぜならば、この積分は、 m, n を整数として

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi \frac{m}{L}x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L}x\right) dx \quad (3)$$

と表され¹、 $m \neq n$ のときは、この積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i2\pi \frac{m-n}{L}} \left[\exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L}x\right) \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{i2\pi \frac{m-n}{L}} \left\{ \exp\left(i2\pi \frac{m-n}{L} \frac{L}{2}\right) - \exp\left(-i2\pi \frac{m-n}{L} \frac{L}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{L}{m-n} \sin \pi(m-n) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

であり、 $m = n$ のときは

¹ $\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right)$ のほうの i の前に $-$ がついているのは、複素共役をとっているためです。

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \exp(0) dx = [x]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = L \quad (5)$$

となるからです。この積分を2つの波の**内積**とよびます。また、このような性質をもつ関数のグループを**直交関数系**とよびます。直交関数系については、第2部で画像情報圧縮について説明するときに、再び取り扱います。

級数の各項の係数は？

さて、関数 $f(x)$ と上の指数関数を使って、次の計算をしてみましょう。 k は整数とします。

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx \quad (6)$$

$f(x)$ は (9) 式の級数で表されますから、上の積分は

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx \quad (7)$$

となりますが、上で示した直交性から、級数のうち周期が k/L の項以外は積分すれば0であり、その結果、(6) 式の積分は

$$\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k \quad (8)$$

となります。このことは、関数 $f(x)$ を (9) 式の級数による波の足し合わせで表したとき、それぞれの波の係数は (6) 式で求められることを表しています。(9) 式の級数を、関数 $f(x)$ の**フーリエ級数展開**とよび、(6) 式で求められる係数を、周期 L/k の波の**フーリエ係数**とよびます。

フーリエ変換

周期関数でない場合は、波の足し合わせで書けるのか

前回は、周期関数を三角関数（虚数指数の指数関数）の級数、すなわち「波の足し合わせ」で表したフーリエ級数について説明しました。では、元の関数が、周期関数でない一般の関数のときは、どうなるのでしょうか。

この場合は、「周期が無限大である」と考えます。すなわち、前回の例では、周期関数 $f(x)$ の周期を L としましたが、今回は $L \rightarrow \infty$ となったときの極限を考えます。

(2) 式で示したフーリエ級数の式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \quad (9)$$

は、関数 $f(x)$ が基本周期が $L, L/2, L/3, \dots, L/n, \dots$ の波の足し合わせであることを示しています。こ

ここで L が大きくなると、 n/L と $(n+1)/L$ の差 $1/L$ は小さくなります。このことは、 $f(x)$ をフーリエ級数で表したとき、隣り合う波の周波数の差は小さくなってゆくことを示しています。

隣り合う波の周波数の差 $\rightarrow 0$ のとき、「足し算」は「積分」へ

そこで、この周波数の差 $1/L$ を $\Delta\nu$ で表すことにします。このとき、上のフーリエ級数の式と、(eqn:fourierseries01) 式で示したフーリエ係数の式

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx \quad (10)$$

をあわせると、上の $\Delta\nu$ を使って

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x) \quad (11)$$

となります。 $n\Delta\nu$ は、(周波数の差) $\times$ (項の個数) ですからある周波数をさします。これを、周波数 ν で表します。また、 $L \rightarrow \infty$ のとき $\Delta\nu \rightarrow 0$ ですから、 $\Delta\nu$ を含む総和は、 $d\nu$ を含む積分になります。よって、

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi \nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi \nu x) d\nu \quad (12)$$

が得られます。

フーリエ変換

これを、

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi \nu x) dx \quad (13)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi \nu x) d\nu \quad (14)$$

のように分けて表すとき、式 (13) を**フーリエ変換** (Fourier transformation)、式 (14) を**逆フーリエ変換** (inverse Fourier transformation) とよびます。関数 $F(\nu)$ は、もとの関数 $f(x)$ に、どのような周波数の波がどの程度含まれているかを表しています。上で述べたように、フーリエ級数において $L \rightarrow \infty$ としたので、級数で隣接する波の間隔が 0 に近づいていきます。したがって、フーリエ係数の並び $\{a_k\}$ は、ついに連続関数 $F(\nu)$ に達するわけです。 $f(x)$ が存在する空間を**実空間**、 $F(\nu)$ が存在する空間を**周波数空間**とよびます。また、 $f(x)$ と $F(\nu)$ を**フーリエ変換対**とよびます。

実空間と周波数空間は、同じ関数を表すのに、表し方 (基底) を変えたものということができます。これについては、第 2 部で直交変換を扱うときに、ふたたび説明します。

2次元の波の場合

ここまでは 1 次元の関数の話をしてきましたが、画像のような 2 次元の関数のフーリエ変換は、

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy \quad (15)$$

となります。この場合の、2次元の周波数 (ν_x, ν_y) が、前回説明した空間周波数です。

この式は、指数関数については「指数の足し算＝指数関数のかけ算」という関係、すなわち

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) \quad (16)$$

という関係を使うと、

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy \quad (17)$$

となり、2次元フーリエ変換は「 x, y それぞれに1次元のフーリエ変換をする」のと同じであることを示しています。この性質を「**分離可能** (separable) である」といいます。この性質は、第2部で「画像の直交変換」を行列を使って表すときに、ふたたび出てきます。

参考文献

H. P. Hsu (佐藤平八訳), フーリエ解析, 森北出版, 978-4627930100

なお、参考書では周波数 ν のかわりに角周波数 $\omega = 2\pi\nu$ を使って説明されていることも多く、その場合係数等が違っていることに注意してください。また、フーリエ変換と逆フーリエ変換につく係数も表現のしかたによって違ってきます。