

2026年度秋学期

画像情報処理

第1部・画像のサンプリングと周波数 /

第3回

フーリエ級数とフーリエ変換

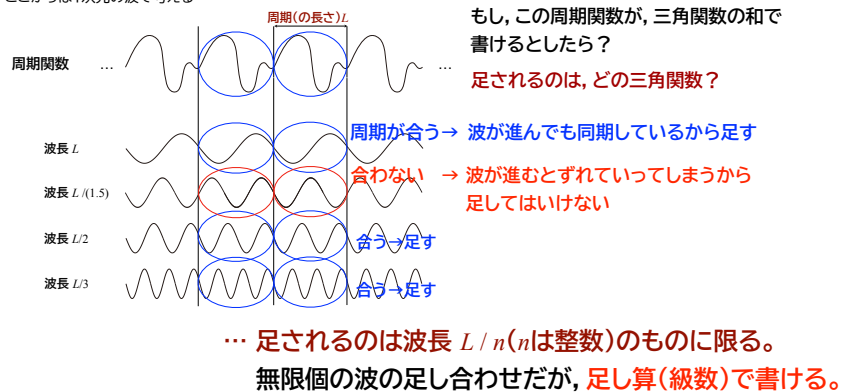


関西大学総合情報学部
浅野 晃

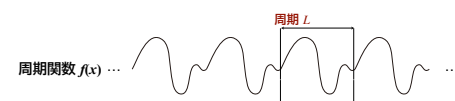
フーリエ級数

周期関数を分解

ここからは1次元の波で考える



「無限個だが、足し算で書ける」



周期関数 $f(x)$ が、三角関数の和で書けるとしたら、足されるのは

$$f(x) = \text{波長 } L + \text{波長 } L/2 + \text{波長 } L/3 + \dots + \text{波長 } L/n + \dots$$

... 足されるのは波長 L/n (n は整数)のものに限るから、
無限個の三角関数を足すのだけれども
このように「項」を並べることはできる
「級数」という

無限個の項を並べることができる, とは

周期関数 $f(x)$ が, 三角関数の和で書けるとしたら, 足されるのは

波長 L/n (n は整数) のものに限る

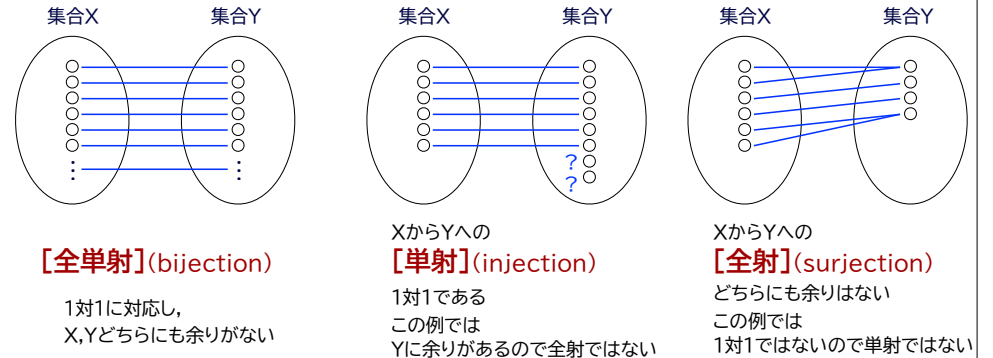
$$f(x) = \underbrace{\text{波長 } L}_{\text{1番めの三角関数}} + \underbrace{\text{波長 } L/2}_{\text{2番めの三角関数}} + \underbrace{\text{波長 } L/3}_{\text{3番めの三角関数}} + \dots + \underbrace{\text{波長 } L/n}_{\text{n番めの三角関数}} + \dots$$

1, 2, 3, ... という自然数と, 過不足なく1対1対応がつく([全単射]が存在する)

これを, 数えられる無限([可算無限])という

「全単射」について

集合の要素間の対応関係について



周期関数 = 三角関数の級数

$$f(x) = a_0 + \underbrace{a_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{L} x\right)}_{\text{波長 } L} + \underbrace{a_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{L} x\right)}_{\text{波長 } L/2} + \dots + \underbrace{a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{L} x\right)}_{\text{波長 } L/n} + \dots$$

なのですが...

三角関数は計算が面倒。

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}$$

指数関数なら計算が簡単

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{かけ算 = 指数の足し算}$$

三角関数と指数関数の関係

$i^2 = -1$ 虚数単位

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$ $\exp(x) = e^x$ $(e^x)' = e^x$
 $\downarrow$
 $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$
 $\exp(-i\omega) = \cos(-\omega) + i \sin(-\omega)$
 $= \cos \omega - i \sin \omega$

微分しても変わらない
 $e = 2.71828\dots$

足し算すると

$$\exp(i\omega) + \exp(-i\omega) = 2 \cos \omega$$

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2}$$

引き算すると

$$\exp(i\omega) - \exp(-i\omega) = 2i \sin \omega$$

$$\sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

三角関数と指数関数の関係

オイラーの式 $\exp(i\omega) = \cos \omega + i \sin \omega$

$$\cos \omega = \frac{\exp(i\omega) + \exp(-i\omega)}{2} \quad \sin \omega = \frac{\exp(i\omega) - \exp(-i\omega)}{2i}$$

ひとつの三角関数=波は、
正負の周波数をもつ指数関数の組で表される

「周波数がマイナス」というのはヘンだが、
プラスの周波数とマイナスの周波数のペアでひとつの波になる

周期関数を指数関数の和で

波長 L/n の波は $\exp(i2\pi \frac{n}{L}x)$ と $\exp(-i2\pi \frac{n}{L}x)$ の組

周期 L の周期関数 $f(x)$ は、波長 L/n の波を足し合わせて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

と書ける **はず**。

書ける, のはいいが

周期 L の周期関数 $f(x)$ は、波長 L/n の波を足し合わせて

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

と書ける **はず**。

この係数はどうやって求めるの？

ある波長の波を切り出す

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \quad \text{から、波長 } L/n \text{ の波に}$$

対応する指数関数だけを切り出したい

波長 L/n の指数関数 $\exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$

一方, $f(x)$ を構成する指数関数のいずれか(波長 L/m)は

$$\exp\left(i2\pi \frac{m}{L}x\right)$$

ある波長の波を切り出す

波長 L/m の指数関数と L/n の指数関数についてこういう計算をしてみる

$f(x)$ の1周期分だけ積分(積分については後半で)

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \underbrace{\exp\left(i2\pi \frac{m}{L} x\right)}_{\text{波長 } L/m} \underbrace{\exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right)}_{\text{波長 } L/n} dx$$

この答は m と n が異なるとき(別の波長) 0

m と n が等しいとき(同じ波長) L

指数関数はこの

「同期しないと積分が0」という性質をもつ **直交関数系**

フーリエ級数展開とフーリエ係数

そこで $\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$ を計算してみる

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \quad \text{なので}$$

$$\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L} x\right) dx$$

級数の各項を積分すると, $n=k$ の項だけは積分すると L

他の項は積分すると 0

つまりこの積分の答は $\frac{1}{L} \cdot L a_k = a_k$ **係数が求まった**

まとめ・フーリエ級数展開とフーリエ係数

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L} x\right)$$

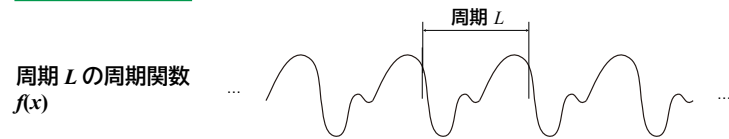
という波の足し合わせ(級数)で表される(**フーリエ級数展開**)

係数 a_n (**フーリエ係数**)は

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L} x\right) dx \quad \text{という積分で表される}$$

フーリエ変換 🤖

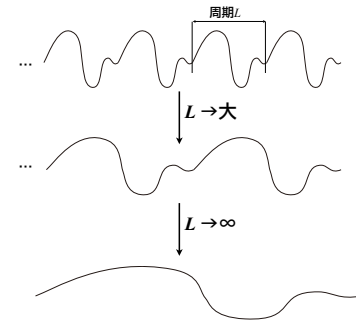
周期関数は、フーリエ級数で表される



$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right) \text{ という、波の足し合わせ(級数)で表される (フーリエ級数展開)}$$

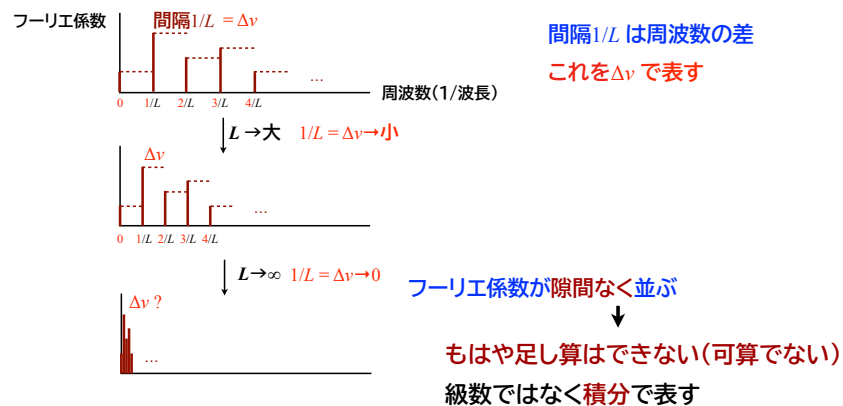
係数 a_k (フーリエ係数) は $a_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{k}{L}x\right) dx$

周期関数でない場合は？



非周期関数は周期が無限大と考える

周期 L が大きくなっていくと



実数は可算無限ではない

自然数と実数に一対一対応がつか？
つまり「実数の集合は可算基数をもつか？」

いいえ。🙅

実数を1つ、2つ、3つと数えることはできない

実数も自然数もその「個数」は無限だが、
実数は自然数よりも本質的に大きな無限

カントールの対角線論法

仮に、すべての実数を1番, 2番, ...と番号をつけて並べられるとする

1番 0.1 2 3 4 5 6 ...
2番 0.8 9 3 1 2 9 ...
3番 0.2 3 0 4 9 0 ...
⋮

0.190... 対角線上の数字を並べた実数をつくる

↓ ↓ ↓

0.201... 各ケタを1ずつずらす

カントールの対角線論法

すべての実数を1番, 2番, ...と番号をつけて並べた表

1番 0.1 2 3 4 5 6 ...
2番 0.8 9 3 1 2 9 ...
3番 0.2 3 0 4 9 0 ...
⋮

各ケタを
1ずつずらした数

0.2 0 1 ...

つまり
「実数は可算でない」

この数字は,

1番の数字とは1ケタめで,

2番の数字とは2ケタめで, ...

n番の数字とはnケタめで

1だけずれているので,

「すべての実数を並べた」表にない ∴ 矛盾

級数から積分へ

周期 L の周期関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(i2\pi \frac{n}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x) \exp\left(-i2\pi \frac{n}{L}x\right) dx$$

$1/L = \Delta\nu$ と書き換える

紛らわしいので別の文字にしたらだけ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi \Delta\nu n \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi \Delta\nu n x)$$

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので, ν であらわす

$L \rightarrow \infty$ のとき $\Delta\nu \rightarrow 0$

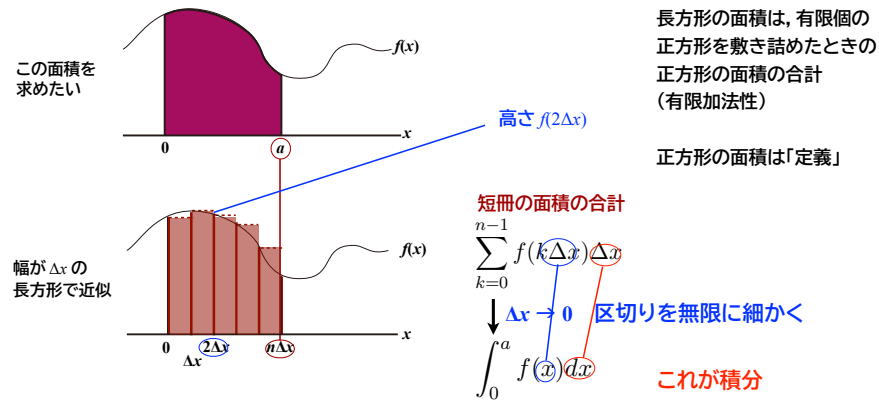
このとき $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n \Delta\nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n \Delta\nu x)$ のなかの総和(Σ)が,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi \nu \tau) d\tau \right) \exp(i2\pi \nu x) d\nu$$

という積分になる

???

積分とは？



★ところで：
長方形の面積＝縦×横？

長方形の面積は、有限個の正方形を敷き詰めたときの正方形の面積の合計（有限加法性）

正方形の面積は「定義」

級数から積分へ

$n\Delta\nu$ はある周波数を表すので、 ν であらわす

$L \rightarrow \infty$ のとき $\Delta\nu \rightarrow 0$

このとき $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\Delta\nu \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \exp(-i2\pi n\Delta\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi n\Delta\nu x)$ のなかの総和(Σ)が、

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$ という積分になる

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x) \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$ 区切りを無限に細かく

$$\int_0^a f(x) dx$$

!!!
積分では、
幅 $d\nu$ が大事です

フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau) d\tau \right) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

と分けて書く

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

フーリエ変換対 という

フーリエ変換

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$$

フーリエ変換

「周波数」

関数の表し方
[基底]が

変わっただけ

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) \exp(i2\pi\nu x) d\nu$$

逆フーリエ変換

「位置」

関数 $f(x)$ にどのような周波数の波がどれだけ含まれているか、「波を切り出す」
フーリエ係数の並びだったのが、周波数の間隔がどんどん小さくなって、
ついにはひとつの関数 $F(\nu)$ になる

周波数 ν の波 $\exp(i2\pi\nu x)$ に、対応するフーリエ係数 $F(\nu)$ をかけたものを
合計(積分)すると $f(x)$ に戻る

2次元の場合は

1次元のフーリエ変換 $F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi\nu x) dx$

2次元のフーリエ変換 $F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp\{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)\} dx dy$

この式は, x, y それぞれに1次元のフーリエ変換をしたことになっている

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\nu_x x) dx \right] \exp(-i2\pi\nu_y y) dy$$

注: $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$
たし算 かけ算

この性質を[分離可能(separable)]であるという (あとで出てきます)