2026 年度秋学期　画像情報処理　第６回

ベクトルと行列について（数学の補足説明），高速フーリエ変換（オンデマンド配信回）

今日は，「行列」や「ベクトル」の考え方の基本を，高校で習っていない人向けに手短に解説します。また，フーリエ変換を行列で表す方法を使って，離散フーリエ変換を行うさいに演算の回数を減らす「高速フーリエ変換」について説明します。

ベクトルと行列の計算

ベクトル

次回（第７回）のテキストでは，「画素が２つしかない画像」を考えて，その画素値 x_1, x_2 を

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 \tag{1}$$

という式で画素値 z に変換する，という話が出てきます。これを，「ベクトル」の書き方では，次のように書きます。

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

右辺の左側の () を**行ベクトル**，右側の () を**列ベクトル**といいます。また，この計算はベクトル同士のかけ算の一種で，**内積**といいます。このように数字を () に入れて並べるだけで，上の (1) 式の計算をしたことになります。

問題 1

次のベクトルの計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(解答例)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$$

■

行列

最初の「画素が２つしかない画像」x_1, x_2 を，別の「画素が２つしかない画像」次に，上の (1) 式のような計算が２組ある場合を考えます。もともとの画素値が x_1, x_2 の２つの組だったので，これを別の２つの画素値の組に，２組の計算で変換する場合にあたります。このとき，それぞれの組を添字 (1) と (2) で区別して，変換後の画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ を求める計算を，ベクトルで表すと

$$
\begin{aligned}
z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となります[1]。この２つの式をひとつにまとめて，次のように書きます。

$$
\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}
$$

この式の右辺にある，数の４つ入った () を**行列**といい，右辺の計算を「行列とベクトルのかけ算」といいます。行ベクトルが列になって並んでいるので，行列とよぶわけです。

問題 2

次の行列とベクトルの計算をしてください。

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}
$$

(解答例)

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}
$$

■

行列，ベクトルと座標平面

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を座標平面でのある点と考えると，(5) 式の計算は，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ という点を $\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix}$ という点に移動する計算を表す，ということもできます。また，このときベクトルという言葉を使うと，「$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は原点から点 (x_1, x_2) をさすベクトル（位置ベクトル）である」といいます。図形的には，原点から点 (x_1, x_2) まで伸びた矢印を想像すればよいでしょう。この言い方をすると，行列とベクトルのかけ算は，ベクトルをベクトルに変換する計算ということができます（図 1)。

問題 3

問題２のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と，問題２の計算結果のベクトルを，座標平面に図示してください。

（解答例）図２の通りです。■

[1] ふつうは，添字にこのようなカッコはつけず，a_{11}, a_{21} のように書きます。ここでは，添え字の意味をわかりやすくするために，このようにカッコをつけて書いています。

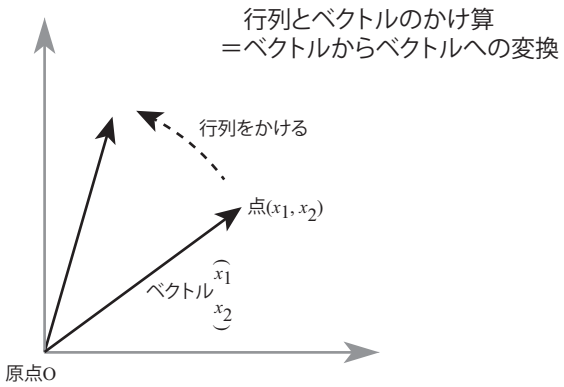


図 1: 行列とベクトルのかけ算.

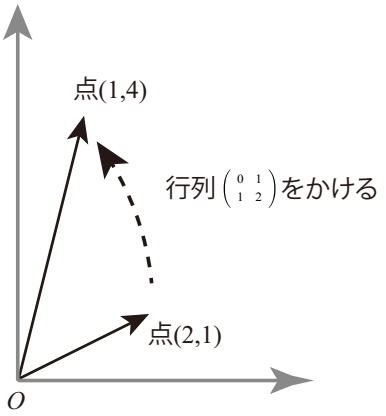


図 2: 問題 3 の解答例.

行列と行列のかけ算

次回（第 7 回）のテキストには,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

という形の式も出てきます。ここで，右辺の λ は普通の数（スカラー）で，このとき右辺は $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ を表します。

次回のテキストでは，この式を満たす a_1, a_2 は 2 組あるので，λ もそれぞれに対応して 2 つある，という話になっています。それらを $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ と表すと，それぞれに対応する式は

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

と表されます。

では, 今度はこれらの 2 つの式を, ひとつにまとめて表してみましょう。列ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ を左右にくっつけて, $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と，ひとつの行列で表します。すると，(8) 式，(9) 式の 2 つの式は，まとめて

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

と表すことができます。このように，2 つの「行列とベクトルのかけ算」をひとつの式に書いたのが,「行列と行列のかけ算」です。

本当にそうなっていることを確かめてみましょう。(10) 式の左辺は，上で述べたとおり,

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \right)$$

のように列ベクトルを左右にくっつけたものです。

一方，(10) 式の右辺も，右側の行列を列ベクトルに分けて

$$\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \right)$$

と表すと，左側の行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$ と右側の行列の左側の列ベクトル $\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}$ の積は

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} + 0 \cdot a_{1(2)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} + 0 \cdot a_{2(2)} \end{pmatrix} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} a_{1(1)} \\ \lambda_{(1)} a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

となります。右側の列ベクトルについても同様です。このように,（行列×列ベクトル）のかけ算を 2 つ同時に行うのが，行列のかけ算です。

問題 4

次の行列と行列の計算をしてください。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

(解答例)

右側の行列を，$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の 2 つのベクトルに分けます。ひとつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times 2+1\times 1\\1\times 2+2\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

となり，ふたつめのベクトルに対しては

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times 1+1\times 0\\1\times 1+2\times 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

となります。よって，これらの 2 つのベクトルを並べて

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 1\end{pmatrix}$$

となります。■

要素が p 個あるベクトルの場合

ここまでは，「画素が 2 つしかない画像」を考えたところから出発して，2 つの要素からなるベクトルについての計算を考えてきました。では，「要素が p 個あるベクトル」の場合を考えてみましょう。

(8) 式，(9) 式の形の式を，要素が p 個の場合に表すと，

$$\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p}\\s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p}\\\vdots & & \ddots & \\s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_p\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_p\end{pmatrix}\tag{12}$$

となります。また，(10) 式を，要素が p 個のベクトルの場合に表すと，

$$\begin{pmatrix}s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p}\\s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p}\\\vdots & & \ddots & \\s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)}\\a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)}\\\vdots & & \ddots & \\a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)}\\a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)}\\\vdots & & \ddots & \\a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{(1)} & & & 0\\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\0 & & & \lambda_{(p)}\end{pmatrix}\tag{13}$$

となります。

こんな式は，大変複雑でとても扱いきれません。また，要素が p 個ある場合は，ベクトルも p 次元空間での「矢印」になり，2 次元の場合のように図形的に考えることもできません。

そこで，(13) 式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して，

$$SP = P\Lambda \tag{14}$$

と表してしまいます。こうしてしまうと，2 次元でも p 次元でも変わりはありません。このように，**複雑な計算をあたかも数の計算のように表して，単純な形で理解しようというのが，行列というものが考えられた理由**です。

ただし，行列のかけ算では，積 AB と積 BA は同じとは限りません。すなわち，数のかけ算とは違って，かける順番が問題になります。

転置行列と対称行列

転置行列とは，ある行列の行と列を入れ替えたもので，例えば行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ です。行列 A の転置行列を，${}^tA, A^t, A^T, A'$ などと表します。今回の講義のプリントでは最後の A' を使っていますが，これは統計学の教科書に多い方式です。さらに，ある行列とその転置行列が同じとき，その行列を**対称行列**といいます。

問題 5

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列を求めてください。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，それぞれは対称行列ですか。

(解答例)

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ です。
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で，もとの行列とは異なるので，対称行列ではありません。一方，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の転置行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で，もとの行列と同じなので，これは対称行列です。■

逆行列と単位行列

さきほど「行列と行列のかけ算」を説明しましたが，行列には「割り算」はありません。そのかわりにあるのが**逆行列**です。

数の割り算で，例えば「2 で割る」という計算は，「$\frac{1}{2}$ をかける」のと同じです。この 2 つの数字は，$2 \times \frac{1}{2} = 1$ で，「かけると 1」という関係になっています。この “1” は，「かけても何もおこらない数」で，単位元といいます。

これと同じように，「かけても何もおこらない行列」を考えます。これを**単位行列**といい，I で表します。つまり，単位行列 I は，どんな行列 X に対しても $XI = IX = X$ となる行列のことです。そして，

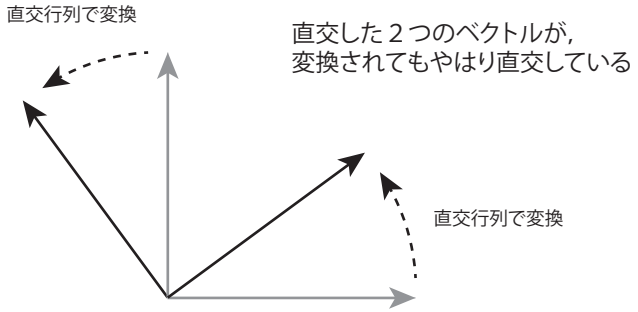


図 3: 直交行列によるベクトルの変換.

行列の A の逆行列 A^{-1} とは，$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となる行列のことで，「かけると I」という関係になっています。つまり，逆行列 A^{-1} をかけることが，あたかも「行列 A で割る」のと同じような計算になっています。例えば，行列の積 XA に右から A^{-1} をかけると $XAA^{-1} = X$ となり，「A で割った」のと同じことになっているのがわかります。

また，(14) 式の $SP = P\Lambda$ という関係は，逆行列を使うと

$$P^{-1}SP = \Lambda \tag{15}$$

とも表されます。

単位行列の中身は，左上から右下に向かう対角線上の数（対角成分）がすべて 1，他はすべて 0 になります。2 次元の場合，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が単位行列です。

直交行列

直交行列とは，逆行列が転置行列と同じであるような行列です。つまり，行列 R が

$$R'R = RR' = I \tag{16}$$

のとき，R は直交行列です。

「直交行列」という名前は，直交行列に含まれる各列ベクトルが互いに直交していて，いずれも大きさが 1 であることをさしています。このことを，各列ベクトルが**正規直交基底**をなす，といいます。なお，「2 つのベクトルが直交している」とは，図形的にはまさに「直角に交わる」ことですが，定義としては「それらの内積が 0 である」ことをいいます。

もともと直交している 2 つのベクトルを直交行列で変換すると，それぞれを変換したベクトルもやはり直交しています。図形的には，直交座標の座標軸を直交したまま回転する計算は，直交行列をかける計算で表されます（図 3)。

問題 6

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

が直交行列であることを確かめてください。

（解答例）次のとおりです。

$$\begin{aligned} R'R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\times 1 + (-1)\times(-1) & 1\times 1 + (-1)\times 1 \\ 1\times 1 + 1\times(-1) & 1\times 1 + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} RR' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1\times 1 + 1\times 1 & (-1)\times 1 + 1\times 1 \\ 1\times(-1) + 1\times 1 & (-1)\times(-1) + 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned} \tag{19}$$

■

問題 7

1. ベクトル $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交していることを，図に描いて確認してください。
2. 座標軸の x 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で，y 軸はベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で，それぞれ表されます。これらのベクトルを直交行列 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で変換して，変換後のベクトルも直交していることを図で確認してください。

（解答例）

1. 図 4 のとおりで，この 2 つのベクトルは直交しています。
2. x 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

で，y 軸をこの行列で変換すると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

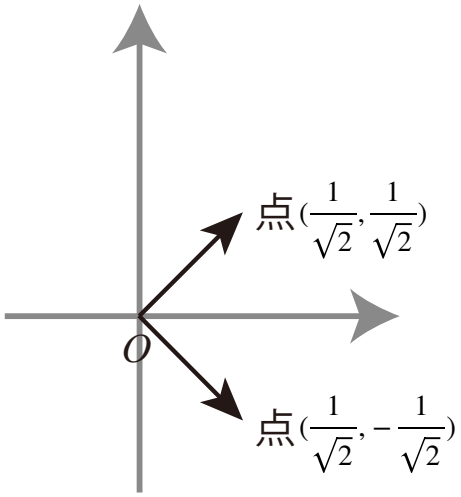


図 4: 問題 7-1.

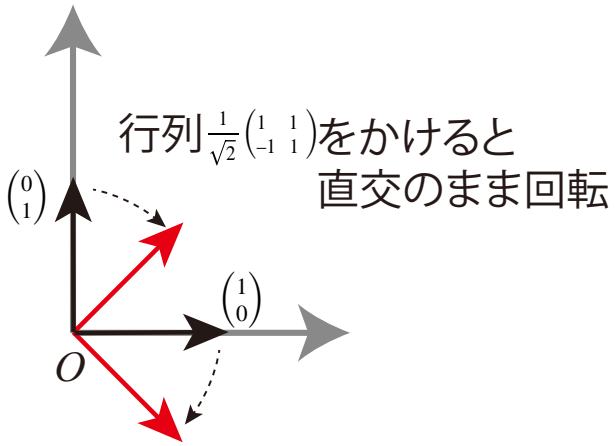


図 5: 問題 7-2.

です。つまり，この行列の 2 つの列ベクトルがそのまま取り出されます（上で出てきた「単位行列」を思い出してください)。したがって，図 5 のように，x, y 軸が，直交したまま 45 度回転したものに変換されたということができます。■

高速フーリエ変換

高速フーリエ変換（Fast Fourier Transformation, FFT）とは，指数関数の性質を利用して，計算をうまくまとめることで，離散フーリエ変換の計算に含まれる掛け算の回数を減らす工夫です。コンピュータによる計算では，掛け算は足し算に比べて時間がかかるので，掛け算を減らすと全体の計算にかかる時間を短くすることができます。ここでは，もっとも広く使われている Cooley and Tukey の高速フーリエ変換を，簡単な例を使って説明します。

「計算をうまくまとめて掛け算を減らす」というのは，簡単にいうと，「$5\times 4+3\times 5$」をそのまま計算せずに，「$5\times(4+3)$」にまとめて，掛け算を 2 回から 1 回に減らすことです。このような工夫を離散フーリエ変換でどうやるかを，フーリエ変換の計算を行列で表す方法を使って，$N=4$，つまり 4 点だけの信号を例にして説明します。

離散フーリエ変換の式

$$U(k)=\sum_{n=0}^{N-1}u(n)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{N}n\right)\quad(k=0,1,\ldots,N-1)\tag{20}$$

で，計算する点の数が 4，すなわち $N=4$ とすると，(20) 式は

$$U(k)=\sum_{n=0}^{3}u(n)\exp\left(-i2\pi\frac{k}{4}n\right)\quad(k=0,1,\ldots,3)\tag{21}$$

となります。この計算は，4^2 回のかけ算でできています。

この計算を，行列を用いて表してみます。ここで，前回と同様に

$$W \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{4}\right) \tag{22}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0\cdot 0} & W^{0\cdot 1} & W^{0\cdot 2} & W^{0\cdot 3} \\ W^{1\cdot 0} & W^{1\cdot 1} & W^{1\cdot 2} & W^{1\cdot 3} \\ W^{2\cdot 0} & W^{2\cdot 1} & W^{2\cdot 2} & W^{2\cdot 3} \\ W^{3\cdot 0} & W^{3\cdot 1} & W^{3\cdot 2} & W^{3\cdot 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{23}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{1} & W^{2} & W^{3} \\ W^{0} & W^{2} & W^{4} & W^{6} \\ W^{0} & W^{3} & W^{6} & W^{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{24}$$

という行列の掛け算で表すことができます。

ここで，右辺にある列ベクトルの要素の順番を，$u(0), u(2), u(1), u(3)$ の順に変えます。すると，

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{2} & W^{1} & W^{3} \\ W^{0} & W^{4} & W^{2} & W^{6} \\ W^{0} & W^{6} & W^{3} & W^{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{25}$$

となります。さらに

$$W^4 = \exp\left(-i2\pi\frac{4}{4}\right) = 1 = W^0 \tag{26}$$

を用いると，

$$\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{2} & W^{1} & W^{3} \\ W^{0} & W^{0} & W^{2} & W^{2} \\ W^{0} & W^{2} & W^{3} & W^{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \tag{27}$$

と表すことができます。

この右辺の行列を，次のように 2 つの行列の積で表します。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} U(0) \\ U(1) \\ U(2) \\ U(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0W^0 & W^0W^0 \\ W^0 & W^2 & W^1W^0 & W^1W^2 \\ W^0 & W^0 & W^2W^0 & W^2W^0 \\ W^0 & W^2 & W^3W^0 & W^3W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^1 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^0 \\ 0 & 0 & W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

このように表したとき，後半の「行列掛けるベクトル」の計算は，実際には

$$
\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(2) \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(3) \end{pmatrix}
\tag{29}
$$

の 2 つの「分割された行列」の計算を行っているのと同じです。このそれぞれで，W^m $(m = 0, 1, 2, 3)$ を掛ける計算を 4 回ずつ行っています。一方，(28) 式の右辺の最初の行列を掛ける計算では，W^m を掛ける計算は 4 回行います。したがって，W^m を掛ける計算は $4 + 4 \times 2 = 12$ 回で，元の $4^2 = 16$ 回から減っています。

(29) 式の 2 つの計算は，$N = 2$ のフーリエ変換になっています。つまり，「$N = 4$ のフーリエ変換」を，「$N = 2$ のフーリエ変換が 2 回＋掛け算 4 回」で表したことになります。同様に，「$N = 8$ のフーリエ変換」を「$N = 4$ のフーリエ変換が 2 回＋掛け算 8 回」で表すことができます。そこで，この分割を繰り返し適用して，

$N = 8$ のフーリエ変換 →
掛け算 8 回 + 2 ×（$N = 4$ のフーリエ変換）→
掛け算 8 回 + 2 ×（ 掛け算 4 回 + 2 ×（$N = 2$ のフーリエ変換））→
掛け算 8 回 + 掛け算 8 回 + 2 × 2 ×掛け算 4 回

と表すと，$N = 8$ のフーリエ変換では元々 $8^2 = 64$ 回の掛け算が必要だったのが，$8 + 8 + 4 \times 4 = 32$ 回に減っています。一般に，N 点のフーリエ変換は元々 N^2 回の掛け算が必要だったのが，この方法で分割していくと $\log_2 N$ 段階に分割され，それぞれで N 回の掛け算を行うので（概ね），$N \log_2 N$ に比例した回数の掛け算で済むことになります。

このように，問題を半分，さらに半分，さらに半分…と分けていく方法は「分割統治 (divide and conquer) 法」とよばれ，アルゴリズムの高速化によく用いられるものです。数字を大きさの順に並べ替える「ソーティング」で，計算量を減らすための方法である「クイックソート」も，同様の考えにもとづいています。