2026 年度秋学期　画像情報処理　第７回

第２部・画像情報圧縮／ 主成分分析と Karuhunen-Loève 変換

画像情報処理の第 2 部は，「直交変換による画像データ圧縮」について説明します。これは，画像のデータを「見た目に影響の大きい成分」と「あまり影響がない」成分に分け，あまり影響がない成分を省くことによって，画像の見た目の印象をあまり変えることなく画像のデータ量を減らすという方法です。このシリーズは，(1) データの「影響の大きい成分」と「あまり影響がない成分」という考え方を導くための主成分分析と Karuhunen-Loève(KL) 変換，(2)KL 変換やフーリエ変換などを一般的にとらえる行列のユニタリー変換と基底画像，(3) ユニタリー変換の 1 つコサイン変換を使った画像圧縮と JPEG 規格の 3 回に分けて講義します。

視覚的に「重要な成分」と「あまり重要でない成分」

「画素が 2 つしかない画像」と，散布図による表現

この節では，説明のために画素が 2 つしかない画像を考えます。そして，この 2 画素の画像をたくさん取り扱うという状況を考えてみましょう。当然，いろいろな画素値の組み合わせがあります。そこで，2 つの画素値を x_1, x_2 として，これらの画像の分布を x_1, x_2 を軸とする座標平面に描いてみます（このような図を**散布図**といいます)。これが図 1 のようになったとしましょう。+印 1 つが 1 つの画像に対応します。図 1 の場合では，x_1, x_2 のどちらの分散も大きくなっています。「分散が大きい」とは「値がさまざまにばらついている」ということですから，このことは，x_1, x_2 のどちらも，各画像の違い（「個性」）をよく表現していることを意味しています。ですから，これらの画像を表現するためには，x_1, x_2 のどちらの画素値も省略することはできません。

片方の画素値を省略できる場合

しかし，もしも画像の分布が図 2 のようであればどうでしょう。この場合，各画像の画素 x_1 の値はさまざまに異なっているのに対して，画素 x_2 はどの画像もあまり変わらない値になっています。したがって，図 2 の各画像の違いを表現するのには画素 x_1 だけが重要で，画素 x_2 はさほど重要ではなく，何か 1 つの値（例えば各画像の画素 x_2 の平均）で置き換えてしまっても，さほど困らないということになります。つまり，これらの画像は x_1 だけで概ね表現できるわけで，この考えでデータの量を半分にできます。

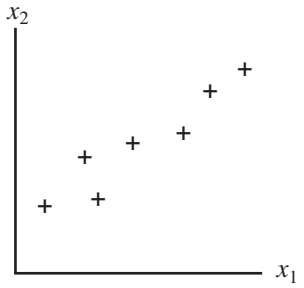


図 1: 2 画素の画像の分布の例 (1)

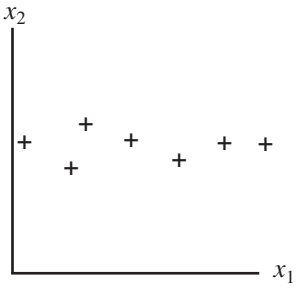


図 2: 2 画素の画像の分布の例 (2)

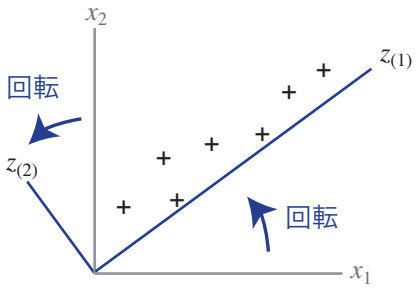


図 3: 軸の回転

2 つの画素値間の相関

図 2 のような画像の分布を，図 1 のように画像が分布している場合でも作ることはできないでしょうか？

図 1 の画像の分布が，右上がりの斜め上向きの直線に沿って広がっていることに注目してください。このことは，図 1 の分布においては，x_1 が大きければ x_2 も大きいという傾向がある，すなわち「x_1 と x_2 に正の相関がある」ことを示しています。画像の場合でいえば，「画像はたいてい，全体に明るいか全体に暗いかという傾向がある」ということで，実際の画像についてもとくにおかしな状況ではありません。

散布図の軸を回転して，「片方の画素値を省略できる」ようにする

正の相関に限らず，x_1 と x_2 に相関があるならば，図 2 のような画像の分布は，図 3 のように軸を回転することによって可能になります。このように画素 x_1, x_2 を新たな画素 $z_{(1)}, z_{(2)}$ に変換した場合，画素 $z_{(1)}$ は「重要な成分」，画素 $z_{(2)}$ は「あまり重要でない成分」ということになります[1]。

散布図の軸を，どれだけ回転するか

このように x_1, x_2 軸を回転した $z_{(1)}, z_{(2)}$ 軸による座標平面では，

1. 画像の分布が，右上がりでも右下がりでもなく，左右に広がっています。この状態を「**相関がない**」といいます。
2. $z_{(1)}$ 軸上での画像のばらつきは， x_1 軸上での広がりよりも大きくなっています。それだけでなく，座標軸をいろいろ回転するなかで，図 3 のように回転したときが **$z_{(1)}$ の値の分散が最大**となっています。

このことを手がかりに，x_1, x_2 軸をどれだけ回転すれば，図 3 のような $z_{(1)}, z_{(2)}$ 軸になるのかを求めるのが，次節の「主成分分析」です。

主成分分析

画素値の分散と画素値間の共分散

i 番目の画像の画素 x_1, x_2 の値を x_{1i}, x_{2i} とすると，画素 x_1, x_2 の値の平均 $\overline{x_1}, \overline{x_2}$，分散 s_{11}, s_{22}，共分散 $s_{12} = s_{21}$ は，画像の数を n として次のように定義されます。

[1]添字に () をつけているのは，x と z の添字の区別を明確にするためですが，このやりかたは一般的なものではありません。

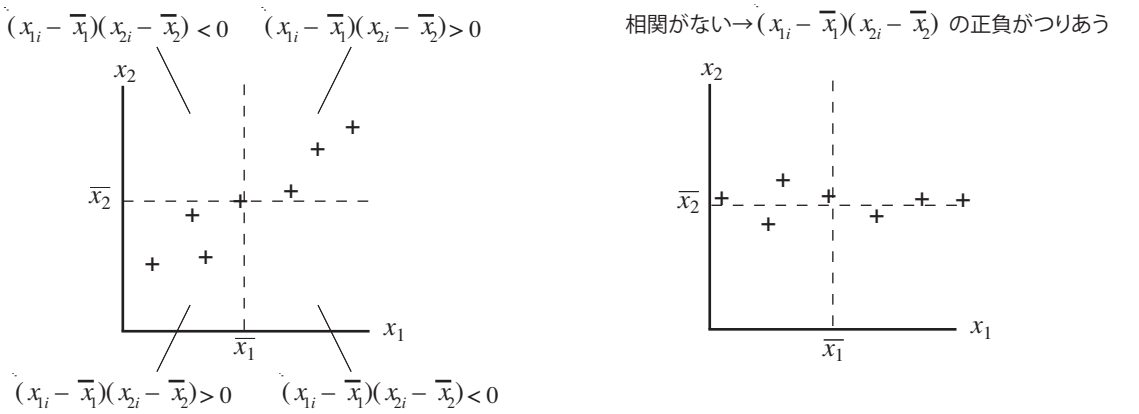


図 4: 共分散の意味．(a) $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ の破線で仕切られた各部分での，$(x_{1i}-\overline{x_1})(x_{2i}-\overline{x_2})$ の正負．(b) 相関がない時．

$$\overline{x_1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i},\quad \overline{x_2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{2i},\quad s_{11}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x_1})^2,\quad s_{22}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\overline{x_2})^2$$

$$s_{12}=s_{21}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x_1})(x_{2i}-\overline{x_2}). \tag{1}$$

共分散の意味

共分散 $s_{12}=s_{21}$ を（画素 x_1 の値の標準偏差）×（画素 x_2 の値の標準偏差）すなわち $\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}$ で割ったものが相関係数で，2 つの軸の相関がないとき共分散は 0 となります。これは，次のように直感的に説明できます[2]。

図 4 のように，$\overline{x_1}, \overline{x_2}$ で散布図を 4 つに区切ります。このとき，右上・左下の区切りでは (1) 式の $(x_{1i}-\bar{x_1})(x_{2i}-\bar{x_2})$ は正となり，左上・右下では負となります。ですから，図 4(b) のように，x_1 と x_2 の間に相関がないときは，$(x_{1i}-\overline{x_1})(x_{2i}-\overline{x_2})$ の総和は，正負のものが打ち消しあって 0 になります。

回転後の画素値は

さて，図 3 のように散布図の軸を回転したときの，変換後の画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ と x_1, x_2 との関係を考えます。元の画素値 x_1, x_2 に対して，新しい画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ のそれぞれが

$$z=a_1x_1+a_2x_2 \tag{2}$$

の形で表されるものとします。

[2]共分散については，私の「統計学」第 6 回の講義録を参照してください。この講義のスケジュールからリンクしてあります。

回転後の画素値は

変換後の画素値の分散 $V(z)$ は，上記の分散・共分散を用いると，次のように表されます。

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(a_1x_{1i}+a_2x_{2i})-(a_1\overline{x_1}+a_2\overline{x_{2i}})\}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(a_1(x_{1i}-\overline{x_1})+a_2(x_{2i}-\overline{x_2})\}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(a_1^2(x_{1i}-\overline{x_1})^2+2a_1a_2(x_{1i}-\overline{x_1})(x_{2i}-\overline{x_2})+(a_2^2(x_{2i}-\overline{x_2})^2\} \\
&= a_1^2\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x_1})^2\}+2a_1a_2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i}-\overline{x_1})(x_{2i}-\overline{x_2})+a_2^2\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{2i}-\overline{x_2})^2\} \\
&= a_1^2s_{11}+2a_1a_2s_{12}+a_2^2s_{22} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

a_1, a_2 を求める

分散共分散行列

変換後の画素値の分散 $V(z)$ を最大にする a_1, a_2 を求めれば，どのように座標軸を回転すればよいかがわかります。そのやり方は，付録 1 で説明しています。その方法によれば，

$$
\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad (4)
$$

という関係が得られます。ここで左辺の行列は，**分散共分散行列** (covariance matrix) とよばれています。

固有値と固有ベクトル

(4) 式を満たす λ を，この分散共分散行列の固有値 (eigenvalue)，$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル (eigenvector) といい，これらを求めることを，分散共分散行列の「固有値問題を解く」といいます。

変換後の分散 $V(z_{(1)})$ と固有値

この固有値問題を解くと[3]，固有値 λ と固有ベクトルの組が 2 つ得られます。このとき，固有値のうち大きい方を $\lambda_{(1)}$，小さい方を $\lambda_{(2)}$ とします。付録 2 で示すように，$\lambda_{(1)}$ は，分散が最大となる $z_{(1)}$ 軸での分散 $V(z_{(1)})$ を表します。

変換後の画素値 $z_{(1)}$

また，変換後の画素値 $z_{(1)}$ は，固有値 $\lambda_{(1)}$ に対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ を使って，(2) 式から

[3]固有値問題の解き方はここでは省略します。私の「応用統計学」(広島大 2010 年度前期) 第 5 回の講義録を参照してください。この講義のスケジュールからリンクしてあります。

$$z_{(1)} = a_{1(1)}x_1 + a_{2(1)}x_2 = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

で求められます。この $z_{(1)}$ を**第 1 主成分**といい，それぞれの 2 画素画像を表すための「もっとも重要な成分」ということができます。

第 2 主成分 $z_{(2)}$，座標軸の回転

この例では 2 画素画像を考えているので，もうひとつの（小さい方の）固有値に対する固有ベクトルから同様に得られる $z_{(2)}$ が第 2 主成分となります。一般に p 画素画像を考える場合，固有値が p 個求められ，いちばん大きな固有値に対応するのが第 1 主成分，2 番目に大きな固有値に対応するのが「2 番目に重要な成分」である第 2 主成分，以下，第 $3, 4, \ldots, p$ 主成分が求められます。第 p 主成分は「もっとも『重要でない』成分」ということになります。

(4) 式のとおり，分散共分散行列は対称行列で，また対称行列の固有ベクトルは直交することが知られています。したがって，もう 1 つの固有値に対応する第 2 主成分 $z_{(2)}$ を求めると，新しい画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ は新たな直交座標となり，図 3 のような座標軸の回転が行えることがわかります。この手法を**主成分分析** (principal component analysis, PCA) といいます。

主成分分析と行列の対角化

2 組の「固有値と固有ベクトル」の関係

この計算の，もう少し先を見てみましょう。2 つの固有値の大きい方が $\lambda_{(1)}$，小さい方が $\lambda_{(2)}$ で，それぞれに対応する固有ベクトルが $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$ です。これらはどちらも (4) 式をみたしますから，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} &= \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} &= \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

となります。この 2 つの式をひとつにまとめると，第 6 回の講義で説明したように

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix} \tag{7}$$

となります。

分散共分散行列の対角化

ここで，上の式の各行列をそれぞれひとつの文字で表して，

$$SP = P\Lambda, \quad \text{すなわち} \quad \Lambda = P^{-1}SP, \; S = P\Lambda P^{-1} \tag{8}$$

と表します。このとき，先に述べたように，分散共分散行列 S は対称行列なので行列 P に含まれる各固有ベクトルは直交していて，元の座標軸 x_1, x_2 を回転する働きをしています。すなわち，P は直交行列で，これも前回述べたように，P の逆行列 P^{-1} は，P の転置行列 P' と同じです。つまり，

$$P'SP = \Lambda, \quad \text{すなわち} \quad S = P\Lambda P', \tag{9}$$

となります。これを対称行列 S の**対角化** (diagonalization) とよんでいます。

直交変換

また，第 1，第 2 主成分 $z_{(1)}, z_{(2)}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} z_{(1)} &= \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ z_{(2)} &= \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

と表されますから，この 2 つをまとめると

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

です。上の式に出てくる行列は，(7) 式・(8) 式での行列 P の定義と比べると，転置行列 P' にあたることがわかります。すなわち，行列 P' が，もとの画像の画素値 x_1, x_2 を新たな画像の画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ に変換する行列を表します。この形式による画像の変換を，画像の**直交変換** (orthogonal transformation) とよんでいます。

「分散が最大」と「相関がない」

また，(9) 式は，もとの画像 x_1, x_2 での分散共分散行列が，「一度画像 $z_{(1)}, z_{(2)}$ に変換して（P'）」，「固有値をならべた対角行列 Λ をとり」，「もう一度画像 x_1, x_2 にもどる（$(P')^{-1} = P$）」という操作で得られることを示しています。このことは，変換後の画像 $z_{(1)}, z_{(2)}$ については，分散共分散行列が対角行列 Λ で表され，共分散が全て 0，すなわち各画素値 $z_{(1)}, z_{(2)}$ が互いに無相関であることを意味しています。つまり，座標を回転したとき「分散が最大になる」ことと「相関がなくなる」ことは，同じことであるのがわかります。

画素が p 個ある場合

第 k 主成分

ここまでは画素が 2 つの画像を考えましたが，画素が p 個ある一般の画像でも，考え方はまったく同じです。画像が画素 $x_1, x_2, \ldots, x_p$ からなるとするとき，変換後の画素を

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p \tag{12}$$

で表して，z の分散を最大にする $a_1, a_2, \cdots, a_p$ を求めることを考えます。この問題は，2画素の場合と同様に

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \tag{13}$$

という分散共分散行列の固有値問題になります。ここで，s_{ij} は x_i と x_j の共分散を意味します。また，前節の2変数の場合と同様に，(13) 式で求められる p 個の固有値は，各々変換後の画素値 z の分散になります。そこで，固有値を大きいほうから $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \ldots, \lambda_{(p)}$ とし，対応する変換後の画素を $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(p)}$ とすると，$z_{(1)}$ が「分散が最大の成分」すなわち「もっとも重要な成分」で，$z_{(2)}$ はそれに直交する成分の中で分散が最大の成分，以下番号が進むにつれ重要さがだんだん落ちてゆくことになります。このとき $z_{(k)}$ を**第 k 主成分**とよびます。

行列で表せば，p 画素画像で同じ

また，2画素画像の場合だけでなく，p 画素の画像の場合でも，

$$SP = P\Lambda, \quad \text{すなわち} \quad P^{-1}SP = \Lambda \tag{14}$$

という「対角化」の関係は同じです。このように行列をひとつの文字で表してしまうと，これはすでに説明した2画素の場合とまったく同じで，そのあとの直交変換に関する説明も，

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \tag{15}$$

とすれば，2画素画像の場合とまったく同じです。このように，行列の形にまとめることで，何画素の場合でも（ベクトルが何次元あっても）まったく同じように理解できるのが，行列という形式の大きな利点です。

Karhunen-Loève 変換

主成分の寄与率

「第 k 主成分の分散の，分散の合計に対する割合」，すなわち $\lambda_{(k)}$ の $(\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \cdots + \lambda_{(p)})$ に対する割合を，第 k 主成分の**寄与率**といいます。つまり，寄与率は，最初の節で説明した「変換後の画素の重要さ」を表しています。

寄与率の小さな主成分を省略

ここで，ある k 以降の主成分の寄与率が 0，あるいはほぼ 0 とみなせる場合を考えてみましょう。例えば，最初に述べた 2 画素の画像の例では，第 2 主成分の寄与率をほぼ 0 とみなすことができ，第 2 主成分に対応する軸の方向の分散がほぼ 0，すなわち変換後の画素値 $z_{(2)}$ の分散がほぼ 0 ということになります。つまり図 2 のように本来 2 画素で表現していた各画像については，$z_{(2)}$ は不要で $z_{(2)}$ の平均 $\bar{z_{(2)}}$ に置き換えてしまってもよく，1 つの変量 $z_{(1)}$ だけで表現できることになります。

主成分分析では，なるべく第 1, 2, といった番号の若い主成分が分散がなるべく大きくなるように変換しています。いいかえれば，最後のほうの番号の主成分は寄与率がなるべく小さくなるようにしているわけで，最後のほうの番号の主成分を捨てて変換後の画素数を減らしたとき，元の画像との誤差が最小になります。主成分分析には，このようにして，もとのデータのもつ情報をなるべく損なわずにデータ量を減らすことができるという側面があります。

Karhunen-Loève 変換

そこで，いま p 画素からなる画像が多数あるとします。これを伝達するのに，一度に $p/2$ 画素しか使えないとしましょう。このときに情報をなるべく損なわずに伝達するには，どうすればよいでしょうか？それはここまで述べたように，画像を主成分に変換し，第 $1, 2, \ldots, (p/2)$ 主成分だけを伝達して，それ以外の成分は各成分の平均値だけを 1 回だけ伝達しておけばよいことがわかります。もとの画素値を各主成分に変換する (15) 式の直交変換を，この意味で用いるとき **Karhunen-Loève 変換（KL 変換）**とよんでいます。

この主成分を受け取ったほうでは，主成分への変換の逆変換（z から x への変換）を行って，元の画像にもどします。受け取った主成分は $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(p/2)}$ の $p/2$ 個の主成分だけで，あとの主成分はかわりに平均値 $\overline{z_{(p/2+1)}}, \ldots, \overline{z_{(p)}}$ を用います。この逆変換は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} \tag{16}$$

となります。こうすると，画素の数を 1/2 にしたときに情報の損失が最小になります。

Karhunen-Loève 変換は現実にできるのか？

しかし，この方法を用いるには，取り扱う全ての画像を調べて，分散共分散行列を求める必要があります。**一般的にはそれは不可能**です。つまり，これから取り扱う画像がどんな画像かわからなければ，KL 変換はできませんが，そんなことはわかるはずもありません。

そこで，主成分への変換のかわりに，あらかじめ経験にもとづいて適当な変換を決めておき，情報の損失を「最小ではなくともなるべく少なくする」方法が広く用いられています。次回，次々回の講義で説明します。

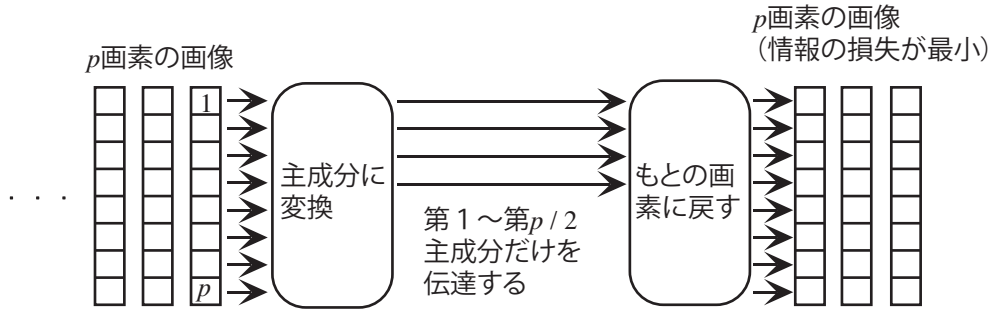


図 5: KL 変換による画像データの圧縮

付録 1：主成分分析について（(4) 式の導出）

x_1, x_2 軸を $z_{(1)}, z_{(2)}$ 軸に変換する (2) 式が，軸の回転であるとき，θ_1, θ_2 を，z 軸（の一方）がそれぞれ x_1, x_2 軸となす角として

$$a_1 = \cos\theta_1, \quad a_2 = \cos\theta_2 \tag{A1}$$

とおくと，(a_1, a_2) は新しい座標軸 z の方向余弦ということになり，a_1, a_2 は

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \tag{A2}$$

を満たします。したがって，問題は (A2) 式の条件のもとでの (3) 式の $V(z)$ の最大化ということになります。

このような制約条件付き最大化問題は，「Lagrange の未定乗数法」によって解くことができます。これによれば，この問題は未定乗数を λ とおいて

$$F(a_1, a_2, \lambda) = a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} - \lambda(a_1^2 + a_2^2 - 1) \tag{A3}$$

を最大化する制約条件なしの最大化問題に帰着されます。これを解くため，F を a_1, a_2, それに λ でそれぞれ偏微分して，それらが 0 に等しいとおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_1} &= 2a_1 s_{11} + 2a_2 s_{12} - 2a_1\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} &= 2a_2 s_{22} + 2a_1 s_{12} - 2a_2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= -(a_1^2 + a_2^2 - 1) = 0 \end{aligned} \tag{A4}$$

という 3 つの式が得られます。ここで，上の 3 番目の式は (A2) 式と同じですから，すでに満たされています。残りの式からは，

$$
\begin{aligned}
a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\
a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda
\end{aligned}
\tag{A5}
$$

という関係が得られます。これを行列を使って書くと

$$
\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}
= \lambda
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}
\tag{A6}
$$

となり，本文の (4) 式の関係が得られます。

付録 2：固有値と分散の関係

画素値 x_1, x_2 から得られる新しい画素値 z の分散 $V(z)$ は，固有値 λ となります。なぜならば，(A5) 式の上の式に a_1 を，下の式に a_2 をかけると，

$$
\begin{aligned}
a_1^2 s_{11} + a_1 a_2 s_{12} &= \lambda a_1^2 \\
a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} &= \lambda a_2^2
\end{aligned}
\tag{A7}
$$

となります。さらに，

$$
a_1^2 s_{11} + 2 a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} = \lambda (a_1^2 + a_2^2)
\tag{A8}
$$

となり，(3) 式と (A2) 式から

$$
V(z) = \lambda
\tag{A9}
$$

が得られます。

この計算は，新しい画素値 z の分散 $V(z)$ を最大にするものです。上で示したようにその値は固有値 λ ですから，そのうち大きい方を $\lambda_{(1)}$，小さい方を $\lambda_{(2)}$ とすると，大きい方の固有値 $\lambda_{(1)}$ が，最大の分散 $V(z_{(1)})$ となります。