2026年度秋学期

画像情報処理

第2部・画像情報圧縮 ／

第7回
主成分分析と
Karhunen-Loève変換



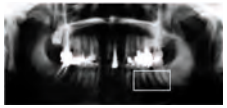
関西大学総合情報学部
浅野 晃

画像情報圧縮

画像情報圧縮の必要性



この画像では，1画素の明るさを0～255の整数で表す
1画素に，2進数8桁 = 8ビット = 1バイト必要
1000万画素のデジタル画像は，約10メガバイト必要



こういう画像は，1画素 = 16ビットで，
2倍の20メガバイト必要なこともある

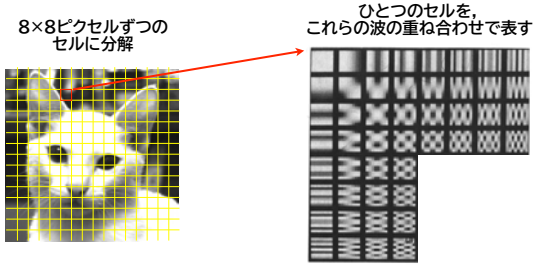


カラー画像ならば，R,G,Bで3倍必要

動画ならば，1秒でこのデータ量の30倍？60倍？

JPEG方式による画像圧縮

画像を波の重ね合わせで表わし，一部を省略して，データ量を減らす



細かい部分は，どの画像でも大してかわらないから，省略しても気づかない

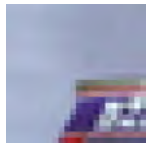
省略すると，データ量が減る

（図はA. K. Jain, Fundamentals of Digital Image Processingより転載）

画像情報圧縮の例

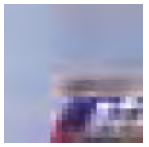
データ量:80KB





データ量:16KB





（8×8ピクセルのセルが見える）

ところで，本当に「波」でいいんですか？🤔

まあ，結局「波」でいいんですけどね…

もっと根本的な原理から説明します。

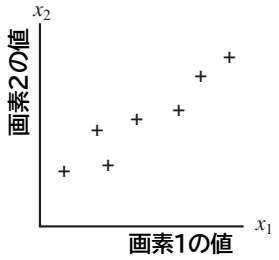
「主成分分析」と「直交変換」

主成分分析🤔

重要な成分と，そうでない成分

しばらく，画素が2つしかない画像を考える

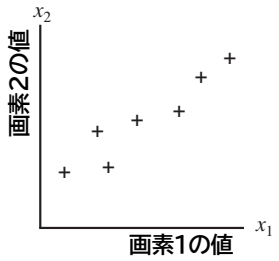
たくさんの2画素画像を考える



ひとつの2画素画像は，
この図の1つの点で表される

（散布図という）

どちらかの画素値を省略できるか？

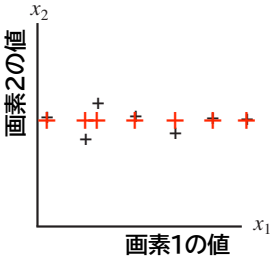


たくさんの2画素画像が
こんなふうに散らばって（分布して）いたら

各画像の違いを表現するのには，
どちらの画素も省略することはできない

どちらの画素値の分散も大きい

こんな分布なら



画素2の値は，どの画像でもあまり変わりない
（分散が小さい）

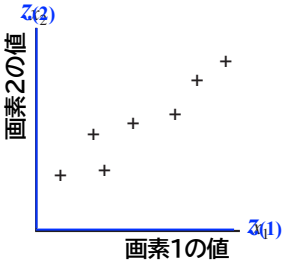
各画像の違いを表現するのに，
画素2はそれほど必要ない

画素2の値は，それらの平均に置きかえてしまってもそれほど変わらない

画素2の値はいちいち記録しなくてもいいから，データ量が半分に減る

そういう都合のいい分布に変換できないの？

散布図上である方向に広がっているなら
（x_1, x_2に相関があるなら）できます。こうすればいい



x_1, x_2を回転して，新たに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$とすればよい

$z_{(1)}$の分散がもっとも大きくなるように回転する

このとき $z_{(1)}$と$z_{(2)}$の相関がなくなる

これをするのが[主成分分析]

主成分分析

x_1, x_2から次の式で zを求めるものとし，
zの分散$V(z)$が最大になるa_1, a_2を求める

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2$$

$V(z)$を求めるために，次の量を用いる

x_{1i}, x_{2i}　n枚中のi番目の画像の，x_1, x_2の値

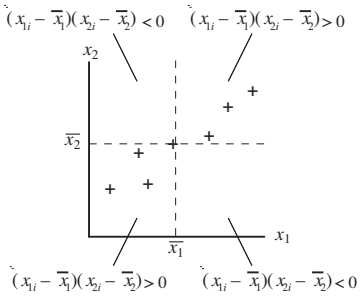
$\bar{x_1}, \bar{x_2}$,　x_1, x_2の全画像にわたる平均

s_{11}, s_{22},　x_1, x_2の分散

さらに共分散も用いる

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{1i} - \overline{x_1})(x_{2i} - \overline{x_2})$$

x_1, x_2の共分散



共分散の正負 ＝ 相関の正負

（共分散を x_1, x_2 の標準偏差で
割ったものが相関係数）

さて，zの分散V(z)は

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 \\ &= a_1^2 s_{11} + 2a_1 a_2 s_{12} + a_2^2 s_{22} \end{aligned}$$

(3)式

$V(z)$が最大になるa_1, a_2を求める

xからzへの変換は「回転」（伸び縮みしない）→　$a_1^2 + a_2^2 = 1$

固有値問題

定数 λ を使って

$$\begin{aligned} a_1 s_{11} + a_2 s_{12} &= a_1 \lambda \\ a_2 s_{22} + a_1 s_{12} &= a_2 \lambda \end{aligned}$$

が得られる（付録1）

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

分散共分散行列

固有ベクトル

固有値

固有値・固有ベクトルを求める問題を
「固有値問題」という（解き方は略）

第1主成分

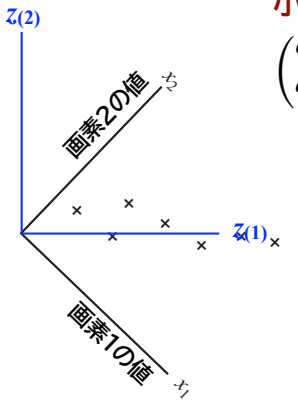
固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ が2組得られて，しかも$V(z) = \lambda$となる（付録2）

固有値 λ

大きい方の λ（$\lambda_{(1)}$とする）に対応する固有ベクトル$\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$を使って求めた z（ $z_{(1)}$ とする） が，求めたかった z

［第1主成分］という
分散が最大の軸
2画素画像の分布を表すのに，もっとも重要な成分

第2主成分，それ以下の主成分



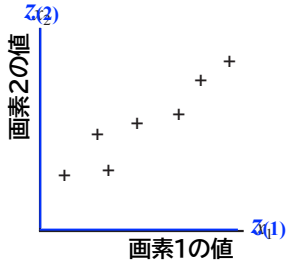
小さい方の λ（$\lambda_{(2)}$とする）に対応する固有ベクトル
$\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$を使って求めた z（ $z_{(2)}$ とする） は

［第2主成分］
分散が小さい方で，重要でないほうの成分

2画素でなくp画素だったら？
固有値（＝分散）が大きい方から小さい方に向かって，
第1,2,3,..., p主成分
↖もっとも「重要でない」成分

主成分分析と直交変換🤔

このときz(1)とz(2)は無相関



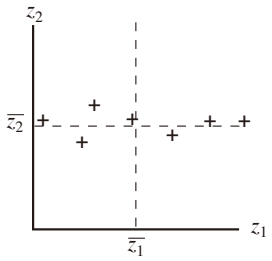
x_1, x_2を回転して，新たに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ とする

$z_{(1)}$ の分散がもっとも大きくなるように回転する

このとき$z_{(1)}$, $z_{(2)}$ の相関がなくなる。
なぜなら

相関がないときは

相関がない→$(z_{1i}-\overline{z_1})(z_{2i}-\overline{z_2})$ の正負がつりあう



共分散＝0

先ほど求めた
$z_{(1)}, z_{(2)}$ はこうなっている → 本当？

分散共分散行列はどうなる？

主成分分析と分散共分散行列

固有値のうち，大きい方を $\lambda_{(1)}$，小さい方を $\lambda_{(2)}$

対応する固有ベクトル $\begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$

これらは

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix} = \lambda_{(1)} \begin{pmatrix} a_{1(1)} \\ a_{2(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix} = \lambda_{(2)} \begin{pmatrix} a_{1(2)} \\ a_{2(2)} \end{pmatrix}$$ をみたす

分散共分散行列の対角化

まとめると

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

S P P Λ

つまり $SP = P\Lambda$

すなわち $\Lambda = P^{-1}SP,\ S = P\Lambda P^{-1}$

（分散共分散行列の）対角化という

対称行列の対角化

分散共分散行列 S は
対称行列

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$ $s_{12} = s_{21}$ 共分散

対称行列の固有ベクトルは直交する（詳細略）

P は直交行列 $\begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} \end{pmatrix}$

直交行列の逆行列は転置行列（逆回転）

すなわち $S = P\Lambda P'$

対角化の意味

$$S = P\Lambda P'$$

分散共分散行列は

P'で変換し

そこでは分散共分散行列がΛで

Pで戻る

「この世」　「あの世」

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{pmatrix}$$

あの世では共分散が0

→相関がない

P′ で変換された「あの世」とは？

$$z_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$z_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

だから

これが P'

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

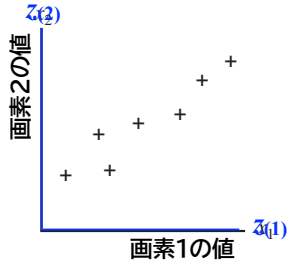
直交行列で変換するから

直交変換という

つまり，x から z に変換すると，

$z_{(1)}$ と $z_{(2)}$ の共分散が0→相関がない

たしかにz(1)とz(2)は無相関



x_1, x_2を回転して，新たに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$とする

$z_{(1)}$の分散がもっとも大きくなるように回転する

このときたしかに$z_{(1)}$, $z_{(2)}$には相関がない

分散共分散行列は対角行列となる

画素がp個あっても同じ

xからzへの，P'による直交変換

$$\begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{2(1)} & \cdots & a_{p(1)} \\ a_{1(2)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{p(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1(p)} & a_{2(p)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Pは固有値問題の解

分散共分散行列S

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

S

$$S \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1(1)} & a_{1(2)} & \cdots & a_{1(p)} \\ a_{2(1)} & a_{2(2)} & \cdots & a_{2(p)} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p(1)} & a_{p(2)} & \cdots & a_{p(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & & & 0 \\ & \lambda_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{(p)} \end{pmatrix}$$

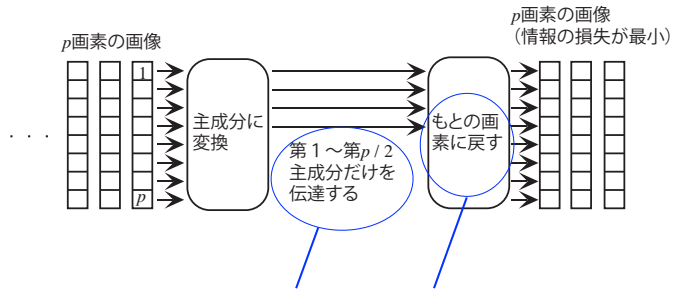
P

P

Λ

Karhunen-Loève変換(KL変換)

画像を主成分に変換してから伝送する



データ量が半分でも
情報の損失は最小

もどすときは,

Karhunen-Loève変換(KL変換)

もどすときは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \simeq (P')^{-1} \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_{(1)} \\ z_{(2)} \\ \vdots \\ z_{(p/2)} \\ \overline{z_{(p/2+1)}} \\ \vdots \\ \overline{z_{(p)}} \end{pmatrix}$$

伝送されて来なかった主成分は,
平均に置き換えておく

KL変換の大問題

主成分を求めるには, 分散共分散行列が必要

分散共分散行列を求めるには,
「いまから取り扱うすべての画像」が
事前にわかっていないといけない

そんなことは不可能。

とは, 最近は言えなくなってきていますが…
それでも, 画像データ圧縮のために, わざわざ
世の中のすべての画像を「学習」するのか？

続きは

分散共分散行列がわからないから,
どういう直交変換をしたらいいかもわからない

経験的にうまくいく直交変換を行う

画像をベクトルではなく, 2次元のまま行列で表して
「行列の直交変換」を考え,
直交変換のようすが目に見えるようにする。

適切な直交変換を選ぶ（実は結局フーリエ変換とその変形）