2026 年度秋学期　画像情報処理　第１０回

第３部・ＣＴスキャナ — 投影からの画像の再構成／ Radon 変換と投影切断面定理

第３部では，CT (computed tomography) スキャナ，すなわち断層撮影装置を取り上げます。このシリーズでは，(1) 投影を定式化する Radon 変換と投影切断面定理，(2) 投影からの物体像の再構成の手法の２回で，CT スキャナの原理を説明します。

CT スキャナとは

CT スキャナとは，物体の横からの透視像を周囲の各方向から撮影し，それらの像から物体の断面の像を再構成する装置です。透視像を撮影するには，X 線透視撮影，あるいは核磁気共鳴 (nuclear magnetic resonace, NMR) 法などが用いられます[1]。最新の医療用 X 線 CT スキャナでは，ほぼリアルタイムで再構成された断面像を得ることができ，また人体の周囲をらせん状にスキャンすることで立体像を再構成することもできます。さらに，手術台の周囲にスキャナ装置を配置して，断面像や立体像を見ながら手術ができる装置も開発されています。また，医療用以外に，金属でできた部品や食料品の内部を破壊せずに検査するための産業用 CT スキャナも用いられています。

CT スキャナでは，透視像は図１のように撮影されます。実際には図 1(b) のように点状の X 線源から放射状に X 線が出て，円周上に並んだ検出器で撮影します (ファンビーム方式) が，ここでは説明のため図 1(a) のように X 線が平行に照射されるものと考えます。X 線源，検出器とも図の位置関係を保ったまま回転します。ですから，どちらの方法でも，物体の各点ですべての方向からの X 線が通過することになります。

さて，X 線源と検出器がある位置関係にあるとき，検出器のある点に届く X 線は，その X 線の経路上の各点で物体に吸収されて減衰します。したがって，検出器のある点に届いている X 線量は，物体のもつ２次元の透過率分布を経路上で積分したものに比例します。ある位置関係の検出器上には，検出器上の各点からみてあるひとつの方向に透過率を積分したものに比例する X 線量が届いています。

このように，CT スキャナによる断面像の生成は，２次元に分布する透過率関数を各方向に積分して得られる１次元の関数の組から，もとの２次元の分布を再現する計算になります。このような積分を２次元分布の**投影**とよび，いま扱う問題は「投影からの２次元分布の再構成」となります。

Radon 変換

投影からの像復元が可能であることを示したのは，Radon が示した次の定理です。

> ２次元の関数の任意の点の値は，その点を通過するあらゆる方向の直線に沿ったその関数の積分から，一意的に求まる。

前節で述べたスキャン操作によって，物体 (の透過率分布) の各点について，その点を通る各方向の線上の積分が投影として得られます。したがって，この方法で得られた投影から物体が復元されるはずです。

[1] この方法による医療用 CT スキャナは NMR-CT とよばれていましたが，「核」という言葉が「核兵器」を連想させるため，これを避けて最近では MRI (magnetic resonace imaging) という名前が一般的になっています。

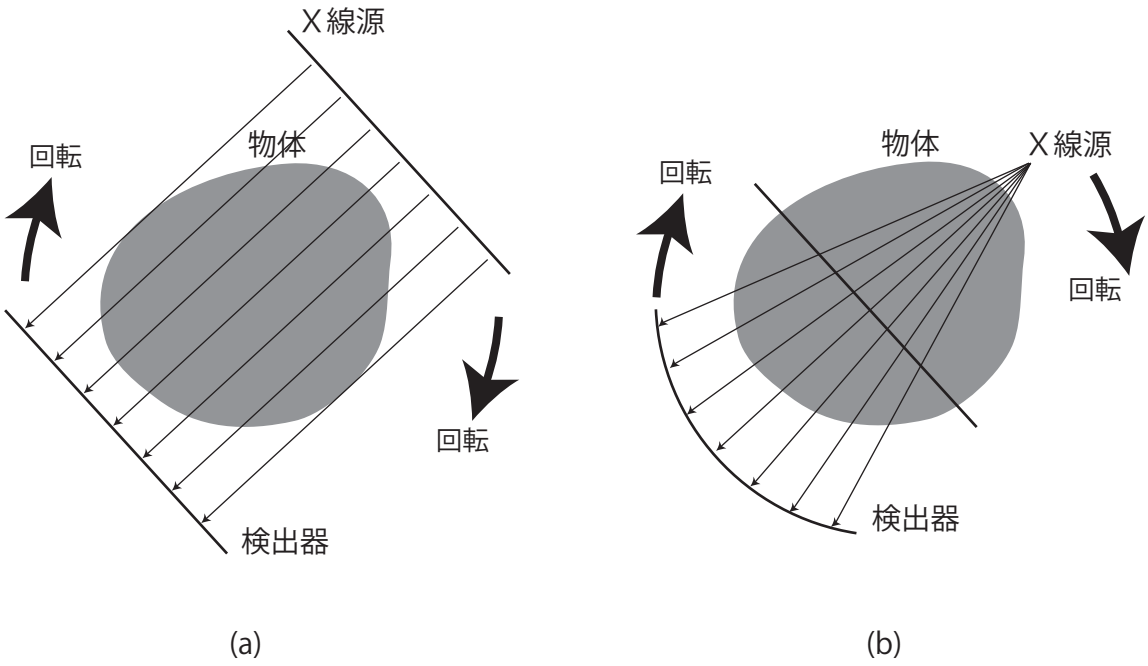


図 1: CT スキャナにおける透視像の撮影．(a) 平行照射．(b) ファンビーム．

2 次元の物体と投影との関係を示すのが **Radon 変換**です。これを示すために，図 2 のような座標系を考えてください。θ 方向の軸 s 上に物体 $f(x,y)$ を投影したものが関数 $g(s,\theta)$ であるとします。$g(s,\theta)$ は，法線ベクトルが θ 方向であるような直線に沿って積分することで得られます。このうち，(x,y) 座標の原点を通る直線上を積分して得られた値を $g(0,\theta)$ とします。

法線ベクトルが θ 方向で，(x,y) 座標の原点を通る直線上の点は

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} \tag{1}$$

を満たしますから，

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 0 \tag{2}$$

が得られます。「法線ベクトルが θ 方向で，(x,y) 座標の原点を通る直線に沿って積分する」とは，$f(x,y)$ のうち (2) 式を満たす点の値だけを積分することですから，$g(0,\theta)$ はデルタ関数を使って

$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy \tag{3}$$

と表すことができます。同様に，「法線ベクトルが θ 方向で，原点から s だけ離れた直線」は，原点を通る直線を x 方向に $s\cos\theta$ ，y 方向に $s\sin\theta$ だけ移動したものですから，(2) 式からこの直線は

$$(x - s\cos\theta)\cos\theta + (y - s\sin\theta)\sin\theta = 0 \tag{4}$$

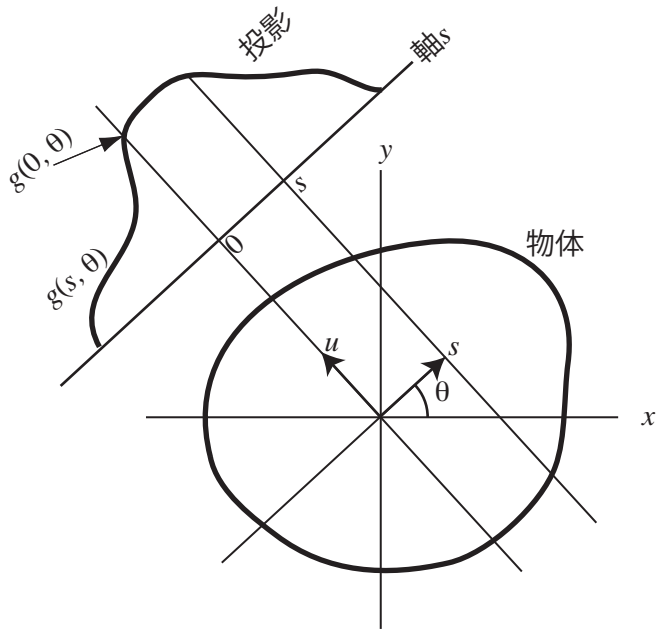


図 2: Radon 変換.

すなわち

$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0 \tag{5}$$

を満たします。したがって (3) 式と同様に

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy \tag{6}$$

が得られます。(6) 式を,2 次元分布 $f(x,y)$ から投影 $g(s,\theta)$ への Radon 変換とよびます。

Ray-sum

Radon 変換は投影を x, y 平面での積分で表していますが，投影は本来投影方向の線積分ですから，1 変数の積分で表されるほうが自然です。そこで，(6) 式を 1 変数の積分で表してみましょう。

図 2 で投影方向に沿った (s,u) 座標は，(x,y) 座標を θ だけ回転したものですから，両者の関係は

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7}$$

と表されます。したがって，(s,u) と (x,y) は

$$\begin{cases} s = x\cos\theta + y\sin\theta \\ u = -x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} x = s\cos\theta - u\sin\theta \\ y = s\sin\theta + u\cos\theta \end{cases} \tag{9}$$

という関係で互いに変換されます。

$g(s,\theta)$ は，$f(x,y)$ のうち「x,y 座標の原点から s 隔たり，法線ベクトルが θ 方向」の X 線によって貫かれる部分の合計です。したがって，$g(s,\theta)$ は，(x,y) が (9) 式の関係を満たして u が変化する時の $f(x,y)$ の積分，すなわち

$$g(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du \tag{10}$$

という 1 変数の積分で表されます。$g(s,\theta)$ のこの表現を **ray-sum** といいます。

Ray-sum が，前節の Radon 変換と同じものであることを確かめてみましょう。(9) 式を，Radon 変換を表す (6) 式に代入すると，デルタ関数の中身は

$$\begin{aligned} & x\cos\theta + y\sin\theta - s \\ = \ & (s\cos\theta - u\sin\theta)\cos\theta + (s\sin\theta + u\cos\theta)\sin\theta - s \\ = \ & s(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - u\sin\theta\cos\theta + u\sin\theta\cos\theta - s \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{11}$$

となります。また，(x,y) 座標から (s,u) 座標への変換では，回転しただけで伸び縮みはしていませんから，$dxdy = dsdu$ です。よって，(6) 式は

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)\delta(0)dsdu \tag{12}$$

となります。デルタ関数は (6) 式で s の関数でしたから,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0)ds = 1 \tag{13}$$

がなりたち，これを用いると (10) 式の ray-sum が得られます。

投影切断面定理

投影からの画像の再構成の問題は，結局 Radon 変換 $g(s,\theta)$ が $0 \le \theta < \pi$（$0 \le \theta < 2\pi$ ではないことに注意）の各 θ について与えられているとき，それらから $f(x,y)$ を求める問題，いわば逆 Radon 変換を求めることになります。この問題を解く重要な鍵が，次に述べる投影切断面定理 (projection-slice theorem，または central slice theorem, Fourier slice theorem) です[2]。

[2]投影定理 (projection theorem) ともいい，本講義でも以前はそう呼んでいましたが，「投影切断面定理」という名前のほうが一般的なようなので，こちらを採用することにします。

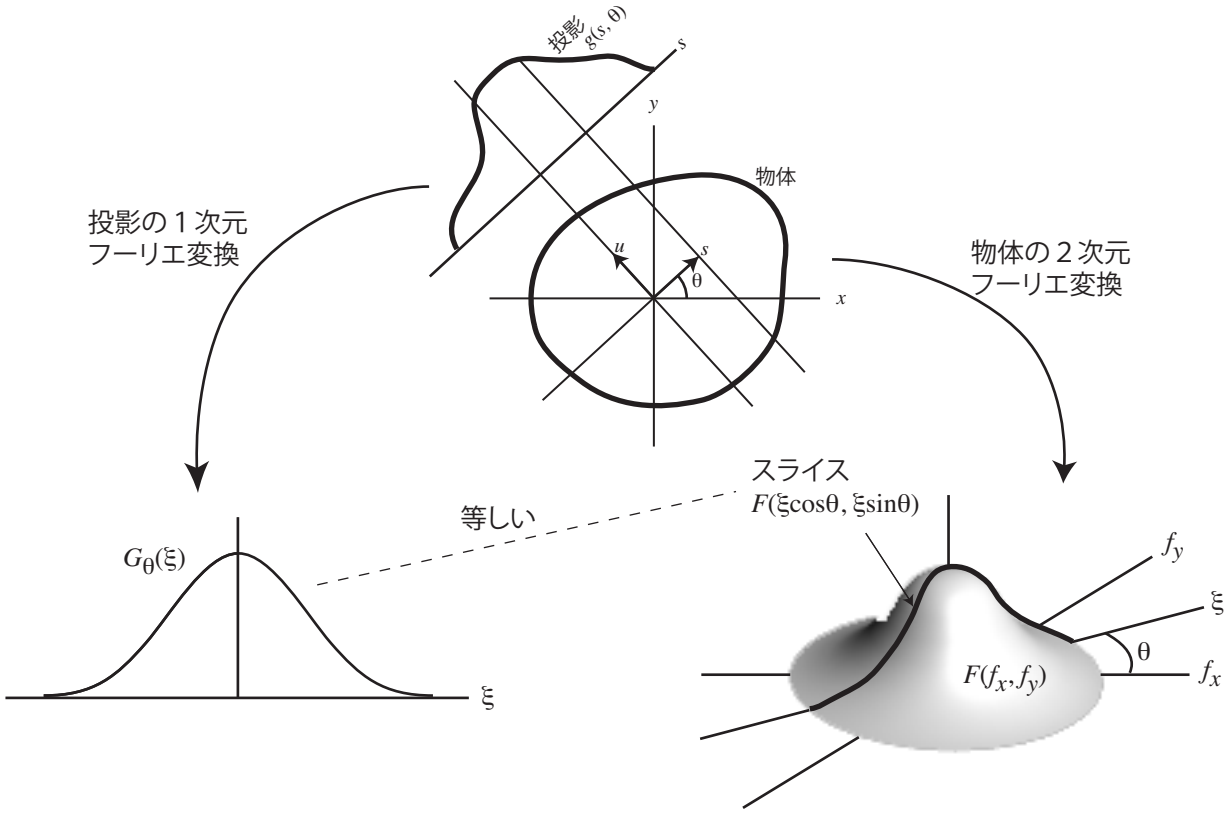


図 3: 投影切断面定理.

投影切断面定理は,

> Radon 変換 $g(s,\theta)$ の s についての 1 次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ と,
> 物体 $f(x,y)$ の 2 次元フーリエ変換 $F(f_x,f_y)$ を，原点を通り f_x, f_y 面に垂直で f_x 軸に対して角度 θ をなす平面によってスライスしたものは ,
> 互いに等しい

すなわち

$$G_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \tag{14}$$

がなりたつ，というものです。この定理は，以下のように証明されます。

Radon 変換 $g(s,\theta)$ の s についての 1 次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ は

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s,\theta)\exp(-i2\pi\xi s)ds \tag{15}$$

と表されます。これに ray-sum の定義である (10) 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta) \\
&\quad \times \exp(-i2\pi\xi s) ds du
\end{aligned} \tag{16}
$$

となります。これに上で説明した (x, y) 座標と (s, u) 座標との変数変換を行うと，先に述べたように $dxdy = dsdu$ ですから，

$$
\begin{aligned}
G_\theta(\xi) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \\
&\qquad \exp(-i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)) dxdy \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \\
&\qquad \exp(-i2\pi((\xi\cos\theta)x + (\xi\sin\theta)y)) dxdy \\
&= F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)
\end{aligned} \tag{17}
$$

となります。

フーリエ変換法による再構成

投影切断面定理によれば, ひとつの角度 θ における投影を得ると，物体のフーリエ変換のひとつのスライスがわかることになります。したがって，すべての θ についての投影を求めれば，物体のフーリエ変換 $F(f_x, f_y)$ の形はすべて求まります。こうやって得られた $F(f_x, f_y)$ を逆フーリエ変換すれば，もとの物体 $f(x, y)$ が再構成されます。このような再構成法を，**フーリエ変換法 (Fourier transform method)** による再構成といいます。

この方法は理論的にもっともすっきりしていますが，CT スキャナの開発当初は，用いることはできませんでした。それは，次の理由によります。

実際に透視像を撮影する場合,「すべての θ」についての投影を求めることはできず，θ についてある程度の間隔をおいて撮影することになります。また，計算機で $g(s, \theta)$ をフーリエ変換を計算するときには，s についてサンプリングを行って離散フーリエ変換を行うことになります。したがって，実際の撮影では $F(f_x, f_y)$ は f_x, f_y 平面で放射状に並んだ離散的な点についてしか求まりません。一方，$F(f_x, f_y)$ を離散逆フーリエ変換するには，f_x, f_y 平面で正方格子状にならんだ格子点について $F(f_x, f_y)$ を知る必要があります。これらの点は異なった点ですから，放射状の点での値から格子点での値を，何らかの補間等を用いて推定しなければなりません。このような周波数空間での補間による誤差は，実空間では画面全体にわたるアーティファクト (artifact，本来存在しないのに処理のために生じる雑音) を生じます。画像診断では，正常ならばないはずのもの，例えば腫瘍などを画像から発見することで診断を行いますから，アーティファクトは大きな障害になります。

このため，計算機の能力が不足していた頃には，フーリエ変換法による再構成では十分な性能が得られませんでした。次回は，別のアプローチによる再構成の方法を示します。

参考文献

A. K. Jain, *Fundamentals of Digital Image Processing,* Prentice Hall, 1988.

Imaginis – How Does CT Work?
(http://www.imaginis.com/ct-scan/how-does-ct-work)