2026年度秋学期

# 画像情報処理

第3部・CTスキャナ ― 投影からの画像の再構成 ／

## 第10回
## Radon変換と投影切断面定理



関西大学総合情報学部
浅野 晃

CTスキャナとは🤔

## CTスキャナとは

CT(computed tomography) = 計算断層撮影法

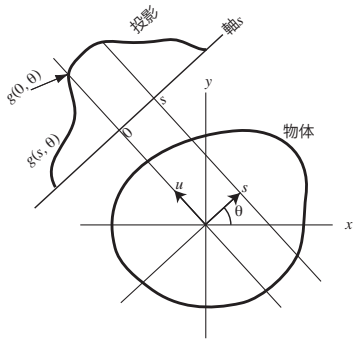


（「わんパグ」http://kids.wanpug.com/illust234.html）

体の周囲からX線撮影を行い，そのデータから断面像を計算で求める



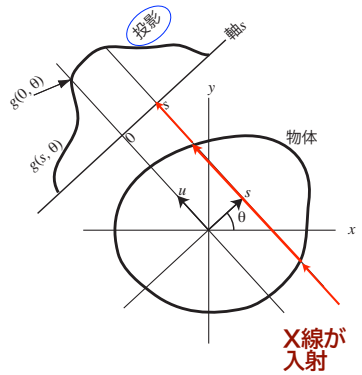
## CTを実現するには




ある方向からX線を照射し，
その方向での吸収率(投影)を調べる

すべての方向からの投影がわかれば，
元の物体における吸収率分布がわかる

# 投影とは



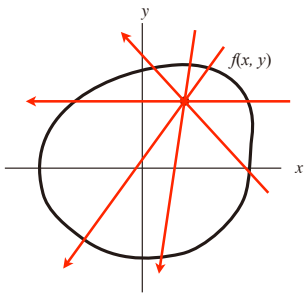

X線がある直線に沿って物体を通過するとき，
直線上の各点で吸収される

通過したX線の量は，
入射した量に吸収率の積分（線積分）を
かけたものになっている

投影＝吸収率の線積分
直線上の吸収率の合計であって，
どの点で吸収されたかはわからない



# Radonの示した定理




2次元関数の任意の点での値は

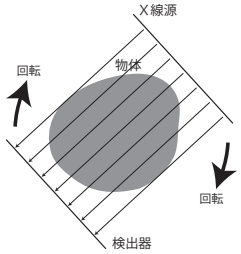
その点を通るすべての投影（線積分）が
わかれば求められる

どうやって求めるかは，あとで説明します。

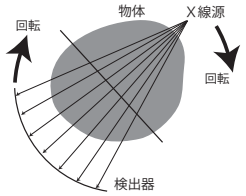


# 各方向からの投影のしかた

理論上はこんなふうに考える




実際はこのようにX線を当てる



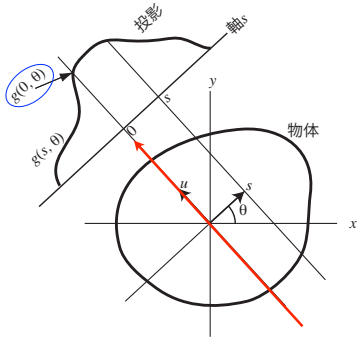

物体の1点について考えれば，投影する順番が異なるだけで，
各方向の投影が得られるのは同じ



Radon変換とray-sum🤔

# Radon変換

投影を2次元の積分で表す




この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを積分する

$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy$$

デルタ関数で表せる



# ディラックのデルタ関数$\delta(x)$

$$\delta(x) = 0 \ \ (x \neq 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

$x = 0$ の1点以外すべてゼロ　　$x = 0$ をはさんで積分すると1

高さは，何だともいえない
（「無限」でもない。なぜなら→ $\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(x)dx = k$

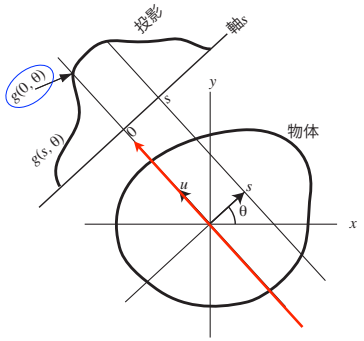



こんなふうに表さざるを得ない



# Radon変換

投影を2次元の積分で表す




この線上では

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$

つまり $x\cos\theta + y\sin\theta = 0$

この線上だけを積分する

→この式を満たす点だけを積分する

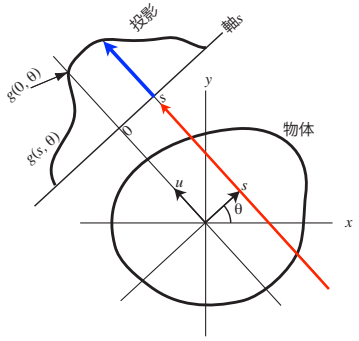
$$g(0,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta)dxdy$$

デルタ関数で表せる



# Radon変換

$g(s,\theta)$は？




この線上では

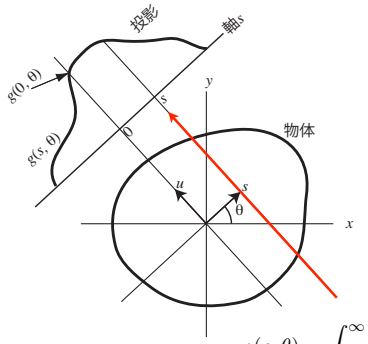
$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0$$

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy$$

Radon変換

# ray-sum

投影を1次元の線積分で表す




$(x, y)$ と $(s, u)$ の関係は $\theta$ の回転

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

$(x, y)$ を $(s, u)$ で表す

この線上では
$s$ が一定で $u$ が変化

$$g(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du$$

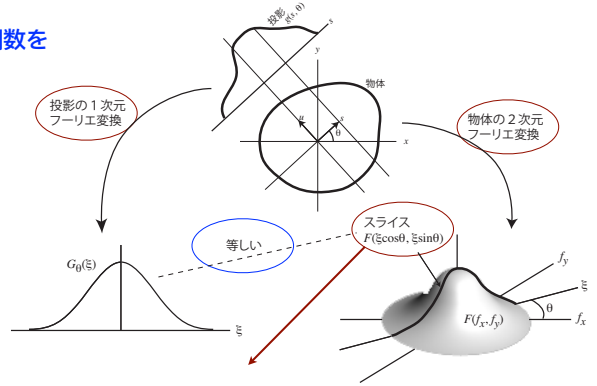
ray-sum



投影切断面定理🤔

# 投影切断面定理

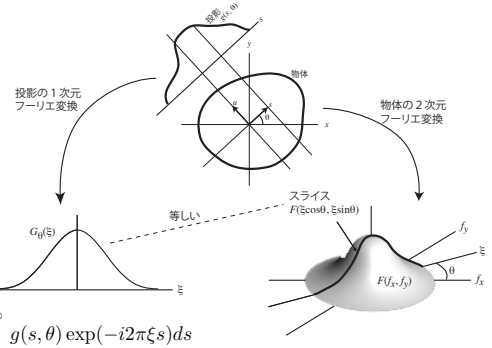
投影群から2次元関数を
再構成する




「スライス」がすべてそろえば，2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる



# 投影切断面定理の証明




$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s,\theta)\exp(-i2\pi\xi s)ds$$

ray-sum

$$g(s,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta)du$$

# 投影切断面定理の証明

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s\cos\theta - u\sin\theta, s\sin\theta + u\cos\theta) \times \exp(-i2\pi\xi s)\,ds\,du$$

$(x, y)$ と $(s, u)$ の関係

$$\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$$

$dxdy = dsdu$
どちらも正方座標の小さな正方形

$x, y$ に書き戻す

$$G_\theta(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-i2\pi((\xi\cos\theta)x + (\xi\sin\theta)y))\,dx\,dy$$

これらを変数と考える

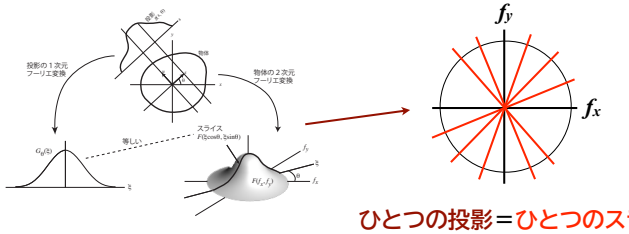
$$= F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)$$

$\theta$ 方向のスライス



# フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の「すべてのスライス」を求めることはできない



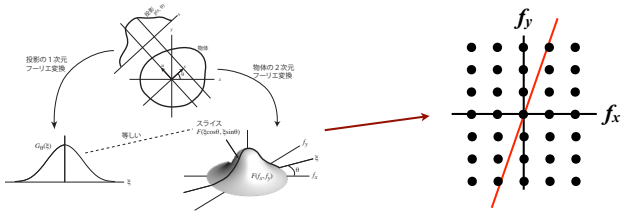

ひとつの投影＝ひとつのスライス

有限個の投影では，2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない →補間を行う



# フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が，コンピュータで計算する限りは「離散的」




周波数空間での誤差は，画像全体にひろがる
アーティファクトを生む

スライスは極座標
2次元フーリエ変換は正方座標

コンピュータの能力が低かった時代は精密な計算が難しかった
→さてどうした？