2026 年度秋学期　画像情報処理　第１１回

第３部・ＣＴスキャナ — 投影からの画像の再構成／ 逆投影法による再構成

第 10 回の講義では，画像の再構成の手がかりとなる「投影切断面定理」と，投影切断面定理によって直接画像を再構成する方法の問題点を説明しました。今回は，ＣＴスキャナの開発当初にこの問題点を解決するために開発された「フィルタ補正逆投影法」の考えを説明します。

なお，現代では，コンピュータの計算能力が桁違いに向上しているので，「初期状態の物体から計算で投影を求める→実際の投影と比較して物体を修正する」というプロセスを繰り返す「逐次近似法」も用いられています。

逆投影法

投影切断面定理からはいったん離れて，もうすこし素朴な再構成の方法を考えてみましょう。物体のある点 (x,y) での値 $f(x,y)$ を求めるのに，(x,y) を通って写された投影をすべての θ について足しあわせることを考えます。こうすると，これらの投影はすべて $f(x,y)$ を含んでいますから，$f(x,y)$ が一番強調され，投影に含まれている他の値によるぼけは生じるものの，一応 $f(x,y)$ が復元されるように思えます。この方法を**逆投影法**といいます。本当に復元ができるかどうか，計算してみましょう。

角度 θ の軸に投影された Radon 変換 $g(s,\theta)$ のうち，(x,y) を通ってきた部分は，前回の (8) 式で説明した s と x,y の関係式

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{1}$$

によって，$g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)$ となります。これをすべての θ について足しあわせるわけですから，逆投影法による再構成像 $b(x,y)$ は

$$b(x,y) = \int_0^{\pi} g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)d\theta \tag{2}$$

と表されます。Radon 変換の式 (前回の (6) 式)，すなわち

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy \tag{3}$$

と (1) 式を (2) 式に代入すると

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^{\pi}\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^{\pi}\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta))d\theta\right]dx'dy' \end{aligned} \tag{4}$$

となります。ここで，関数 $h(\theta)$ が有限個の $\theta = \theta_k$ についてしか 0 にならないとき

$$\delta[h(\theta)] = \sum_k \frac{1}{|h'(\theta_k)|}\delta[\theta - \theta_k] \tag{5}$$

がなりたつことを用います（証明は略）。(4) 式のデルタ関数の引数について

$$\begin{gathered}(x'-x)\cos\theta+(y'-y)\sin\theta=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\sin(\theta+\alpha),\\ \alpha=\cos^{-1}\frac{y'-y}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}=\sin^{-1}\frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\end{gathered}\tag{6}$$

で，$0\leqq\theta<\pi$ でこの値が 0 になるのは $\theta=\pi-\alpha$ のときだけです。したがって，(4) 式のデルタ関数は

$$\delta((x'-x)\cos\theta+(y'-y)\sin\theta))=\frac{1}{\left|\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\cos(\pi)\right|}\delta(\theta-(\pi-\alpha))\tag{7}$$

となり，(4) 式は

$$\begin{aligned}b(x,y)&=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x',y')\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\right]dx'dy'\\&=f(x,y)*\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\end{aligned}\tag{8}$$

となります。$*$ は，第 1 部で出てきたコンヴォリューションの記号です。したがって，逆投影法による再構成像 $b(x,y)$ は，もとの物体 $f(x,y)$ の各点に関数 $1/\sqrt{x^2+y^2}$ を重畳してぼかした像になります。

このままでは，得られた像は大きくぼやけているので，まだ再構成像が得られたとはいえません。しかし，(8) 式をフーリエ変換すると，第 1 部で説明した「コンヴォリューションのフーリエ変換＝フーリエ変換のかけ算」の関係があるので

$$\begin{aligned}FT[b(x,y)]&=FT[f(x,y)]\times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\\\therefore\ FT[f(x,y)]&=FT[b(x,y)]/FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\end{aligned}\tag{9}$$

となります。

$$FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}\tag{10}$$

であることを用いると（証明は略），(9) 式は

$$FT[f(x,y)]=\sqrt{f_x^2+f_y^2}\times FT[b(x,y)]\tag{11}$$

となり，(11) 式でもとの物体 $f(x,y)$ のフーリエ変換を復元できます。この方法を**逆フィルタリング (inverse filtering)** といい，このような方法でコンヴォリューションの逆演算を行うことを**デコンヴォリューション (deconvolution)** といいます。

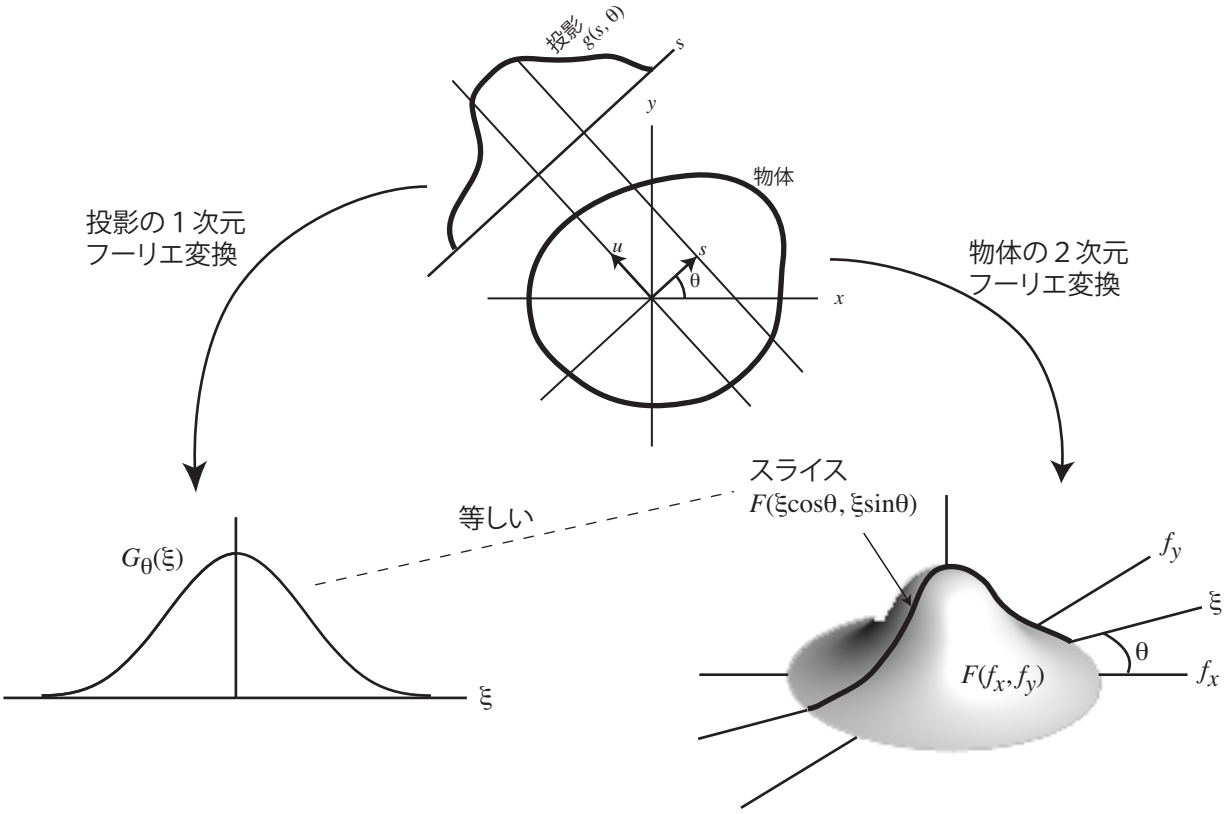


図 1: 投影切断面定理.

この方法には，2 つの問題点があります。そのひとつは，逆投影 $b(x,y)$ は物体 $f(x,y)$ がぼけて広がった形になっているため，$FT[b(x,y)]$ を物体 $f(x,y)$ の存在する範囲よりもずっと大きくとって計算しなければならないことです。

もうひとつは，$f(x,y)$ は吸収率の分布ですから，すべての (x,y) において正の値であるはずなのに，(11) 式から $f_x = f_y = 0$ のとき $FT[f(x,y)] = 0$ となることです。つまり，フーリエ変換の周波数 0 の値，すなわち $f(x,y)$ の平均が 0 なのに，$f(x,y)$ がすべて正の値というのはありえないはずです。これは，$f_x = f_y = 0$ のとき $FT[b(x,y)]$ は発散してしまっていて，そもそも情報が得られていないことに原因があります。

フィルタ補正逆投影法

前節のように逆投影法は実はうまくいきませんが，投影切断面定理を用いると，逆投影法とよく似ていてしかも実用的な再構成法を導くことができます。

$FT[f(x,y)]$ を前回にならって $F(f_x, f_y)$ と書くことにしましょう。$F(f_x, f_y)$ を逆フーリエ変換したものが $f(x,y)$ ですから，

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y \tag{12}$$

と表されます。これを，図 1 の右下のように $f_x = \xi\cos\theta,\ f_y = \xi\sin\theta$ として極座標 (ξ, θ) に変換すると

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)\exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\xi d\xi d\theta \tag{13}$$

となります。投影切断面定理により，Radon 変換 $g(s,\theta)$ の s についての 1 次元フーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ とは

$$G_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \tag{14}$$

という関係がありますから，

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} G_\theta(\xi)\exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))\xi d\xi d\theta \tag{15}$$

が得られます。ここで，ξ の積分区間を $(-\infty, \infty)$ とし，そのかわりに θ の積分区間 $(0, \pi)$ としても，積分する範囲は同じですから

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi)\exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta))|\xi| d\xi d\theta \tag{16}$$

となり，s と x, y の関係式（(1) 式）を使うと

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi)\exp(i2\pi s\xi) d\xi\right] d\theta \tag{17}$$

となります。この式の [ ] 内は，関数 $|\xi|G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換になっています。そこで，

$$\hat{g}(s,\theta) \equiv \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi)\exp(i2\pi s\xi) d\xi \tag{18}$$

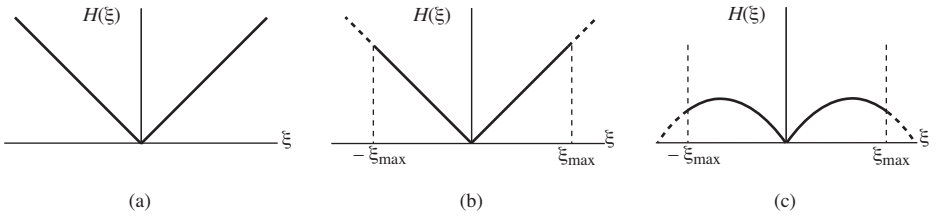
とおくと，(17) 式は

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) d\theta \tag{19}$$

となります。

これは，(2) 式の逆投影と同じ形です。つまり (19) 式は，「各 θ について，投影を周波数空間において $|\xi|$ 倍するフィルタを適用しておいてから，逆投影」すれば物体 $f(x,\ y)$ が得られることを表しています。この方法を**フィルタ補正逆投影法 (filter back projection method)** といいます。前節の「デコンヴォリューションをともなう逆投影法」では逆投影をしてから補正をしていますが，この方法では補正をしてから逆投影しています。

この方法では，投影に関してのみフーリエ変換を扱えばよいので，デコンヴォリューションをともなう逆投影法のように，ぼけによって広がった物体像の逆フーリエ変換を扱う必要はありません。また，投影切断面定理を直接用いるフーリエ変換法と同様に，極座標上の点から直交座標上の格子点への補間の操作が必要ですが，フーリエ変換法と違って実空間で補間を行うので，実空間で画面全体にわたるアー



(a) (b) (c)

図 2: 種々のフィルタ関数．(a) オリジナルのフィルタ関数 ($|\xi|$)．(b) Ram-Lak フィルタ．(c) Shepp-Logan フィルタ．

ティファクトを生じることはありません。また，フィルタによる補正は各 θ で独立に行えるので，ある θ での補正を他の θ での投影の撮影を待たずに行えます。

ところで，(18) 式の計算は Radon 変換 $g(s,\theta)$) のフーリエ変換 $G_\theta(\xi)$ にフィルタ関数 $|\xi|$ をかけて逆フーリエ変換しているだけですから，フィルタ関数を実空間で表した $FT^{-1}[|\xi|]$ を用いると

$$\hat{g}(s,\theta) = g(s,\theta) * FT^{-1}[|\xi|] \tag{20}$$

とコンヴォリューションで表され，フーリエ変換を行う必要はなくなります。この方法は**コンヴォリューション逆投影法 (convolution back projection method)** とよばれています。

計算上の問題点

フィルタ補正逆投影法による再構成を実際に計算する場合，以下の 2 つの問題点があります。

サンプリング

ここまでの式の上では，どの変数も連続値をとるものとして考えていました。しかし，そんなことは現実には不可能です。「すべての θ について投影する」ことも不可能で，実際にはある間隔で装置を回転させながら撮影することになります。また，X 線検出器も，連続した X 線量の分布を記録することはできず，ある一定間隔に並んだ検出器で，X 線量の離散的な分布を検出することになります。このとき，投影のもつ最高の空間周波数を $\xi_{\max}$ とすると，第 1 部で説明したサンプリング定理により，検出器の間隔は $1/(2\xi_{\max})$ 以下でなければなりません。

フィルタ関数の実現

前節で説明した「投影を周波数空間において $|\xi|$ 倍するフィルタ」も，実現には多少工夫が必要です。このフィルタは ξ が大きくなるほど倍率（利得）が大きくなるわけですから，無限の空間周波数では利得が無限になります（図 2(a)）。現実には，このようなフィルタを作ることはできません。

そこで，有限の空間周波数の範囲で定義できるように，フィルタを工夫します。投影のもつ最高の空間周波数 $\xi_{\max}$ 以上の周波数は無意味なので，フィルタでカットしてしまってもかまいません。そこで，図 2(b) のように，関数 $|\xi|$ を $\xi_{\max}$ で切断したものを考えます。これを Ramachandran-Lakshminarayanan フィルタ（Ram-Lak フィルタ）といい，フィルタ関数を $H(\xi)$ で表すと

$$H(\xi) = |\xi| \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \tag{21}$$

となります。

Ram-Lak フィルタは，高周波数を強調する形になっているので，画像中のノイズを強調する傾向があります。その影響を抑えるため，高周波数での利得を抑えるように調整したフィルタがいろいろ提案されています。代表的なものが Shepp-Logan フィルタで，そのフィルタ関数 $H(\xi)$ は

$$H(\xi) = |\xi| \mathrm{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \tag{22}$$

で，図 2(c) のように表わされます。Ram-Lak フィルタに比べて，周波数空間で sinc 関数がかけ算された形になっています。これは実空間では rect 関数とコンヴォリューションを行っていることに相当するので，実空間で平均値フィルタリングをしていることに相当します。