2026年度秋学期

# 画像情報処理

第3部・CTスキャナ ― 投影からの画像の再構成 ／

## 第11回
## 逆投影法による再構成

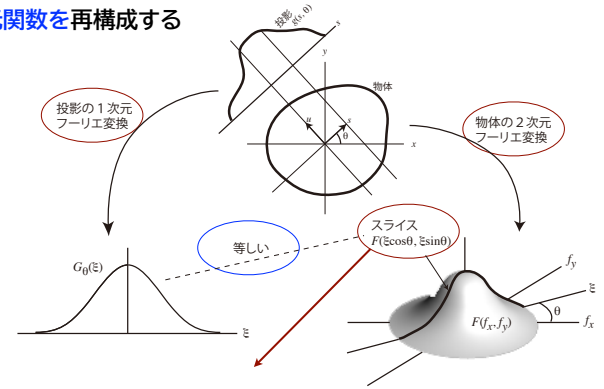


関西大学総合情報学部
浅野 晃

投影切断面定理の復習

## 投影切断面定理

投影群から2次元関数を再構成する

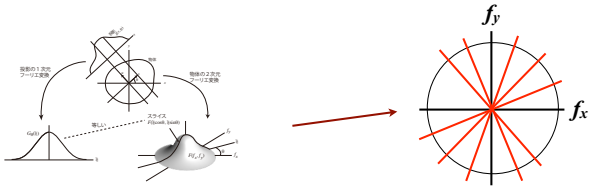



「スライス」がすべてそろえば，2次元逆フーリエ変換で2次元関数が再構成できる



## フーリエ変換法による再構成の問題点

2次元フーリエ変換の「すべてのスライス」を求めることはできない

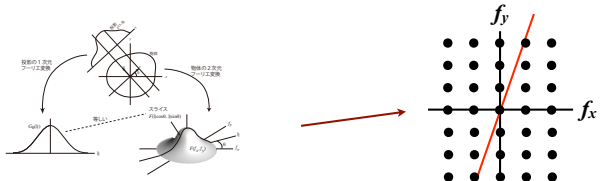



ひとつの投影＝ひとつのスライス

有限個の投影では，2次元フーリエ変換を埋め尽くすことはできない →補間を行う

# フーリエ変換法による再構成の問題点

補間を行う。が，コンピュータで計算する限りは「離散的」






周波数空間の誤差は，画像全体にひろがる
アーティファクトを生む

コンピュータの能力が低かった時代は
精密な計算が難しかった　→さてどうした？

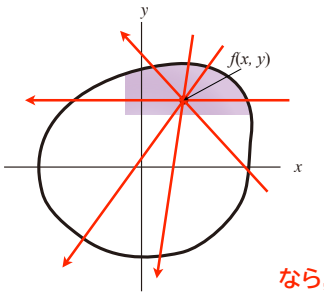
スライスは極座標

2次元フーリエ変換は正方座標



逆投影法

# 素朴な再構成 ー 逆投影




2次元関数の任意の点
$(x, y)$ での値 $f(x, y)$ は

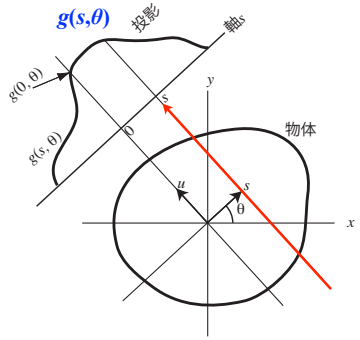
$(x, y)$ を通るすべての投影(線積分)が
わかれば求められる

なら，それらの線積分をすべて合計してみれば？

どの線積分にも $f(x, y)$ は含まれているのだから，
合計したら $f(x, y)$ が強調される？



# 逆投影法




この線上では
$$x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0$$

つまり
$$s = x\cos\theta + y\sin\theta$$

よって投影は
$$g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)$$

これを半周分足し合わせたのが逆投影

$$b(x, y) = \int_0^{\pi} g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)d\theta$$

復元できているのか？ $f(x, y)$ とどれほど違うのだろうか？

# 復元できているのだろうか？

$s = x\cos\theta + y\sin\theta$

Radon変換

$$g(s,\theta) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - s)dxdy$$

逆投影

$$b(x,y) = \int_0^{\pi} g(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)d\theta$$

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^{\pi}\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^{\pi}\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta))d\theta\right]dx'dy' \end{aligned}$$



# 復元できているのだろうか？

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^{\pi}\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^{\pi}\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta))d\theta\right]dx'dy' \end{aligned}$$

**$h(\theta)$が有限個の$\theta_k$でしか0にならないとき**

$$\delta[h(\theta)] = \sum_k \frac{1}{|h'(\theta_k)|}\delta[\theta - \theta_k]$$

**三角関数を合成**

$$(x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\sin(\theta+\alpha),$$
$$\alpha = \cos^{-1}\frac{y'-y}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}} = \sin^{-1}\frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}$$

**$\theta = \pi - \alpha$のときだけ0**

$$\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta)) = \frac{1}{\left|\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\cos(\pi)\right|}\delta(\theta - (\pi - \alpha))$$



# 復元できているといえなくもないが…

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \int_0^{\pi}\left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\delta(x'\cos\theta + y'\sin\theta - (x\cos\theta + y\sin\theta))dx'dy'\right]d\theta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\int_0^{\pi}\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta))d\theta\right]dx'dy' \end{aligned}$$

$$\delta((x'-x)\cos\theta + (y'-y)\sin\theta)) = \frac{1}{\left|\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\cos(\pi)\right|}\delta(\theta - (\pi - \alpha))$$

積分すると 1

よって

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x',y')\left[\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}}\right]dx'dy' \\ &= f(x,y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] \end{aligned}$$

コンヴォリューションになっている



# 復元するには

$$b(x,y) = f(x,y) * \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

フーリエ変換すると，コンヴォリューション→積

$$FT[b(x,y)] = FT[f(x,y)] \times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$\therefore\ FT[f(x,y)] = FT[b(x,y)]/FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$$

$$FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$$ なので

$$FT[f(x,y)] = \sqrt{f_x^2+f_y^2} \times FT[b(x,y)]$$

# これでいいのでしょうか？

$FT[f(x,y)] = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \times FT[b(x,y)]$　　$f_x = f_y = 0$ **周波数0の成分は** $FT[f(x,y)] = 0$

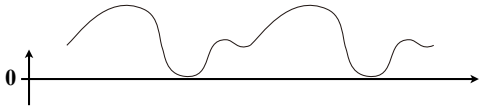
**全体の平均が0**

つまり$f(x,y)$は




こうなっていることになる

**おかしい。**
**吸収率なんだから**




**値は正のはず**

**そもそも**

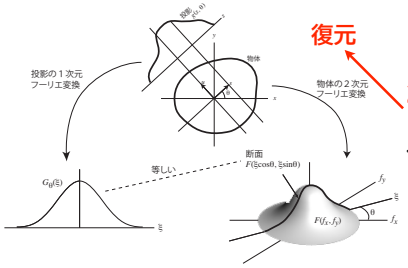
$FT[b(x,y)] = FT[f(x,y)] \times FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

$FT\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$　$f_x = f_y = 0$ **で発散している**



# フィルタ補正逆投影法

**再び投影切断面定理**




**復元**

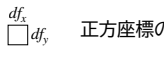
**2次元逆フーリエ変換**

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$



# フィルタ補正逆投影法

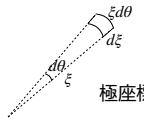
$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x, f_y) \exp(i2\pi(f_x x + f_y y)) df_x df_y$$




正方座標の微小面積

**極座標に変換**　$f_x = \xi\cos\theta,\ f_y = \xi\sin\theta$

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)) \xi d\xi d\theta$$




極座標の微小面積

**投影切断面定理より**

$G_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)$

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)) \xi d\xi d\theta$$



# フィルタ補正逆投影法

$$f(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)) \xi d\xi d\theta$$

**積分区間を変換**

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_\theta(\xi) \exp(i2\pi\xi(x\cos\theta + y\sin\theta)) |\xi| d\xi d\theta$$

$s = x\cos\theta + y\sin\theta$

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi \right] d\theta$$

$|\xi| G_\theta(\xi)$ **の逆フーリエ変換**

# フィルタ補正逆投影法

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi \right] d\theta$$

$|\xi| G_\theta(\xi)$ の逆フーリエ変換

$$\hat{g}(s,\theta) \equiv \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

とおくと,

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) d\theta$$

投影を,「周波数空間で $|\xi|$ 倍するフィルタ」を適用してから, 逆投影



# コンヴォリューション逆投影法

$$\hat{g}(s,\theta) \equiv \hat{g}(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| G_\theta(\xi) \exp(i2\pi s\xi) d\xi$$

ある角度 $\theta$ での投影を
周波数空間で $|\xi|$ 倍 ⟶ 実空間では $FT^{-1}[|\xi|]$ とのコンヴォリューション

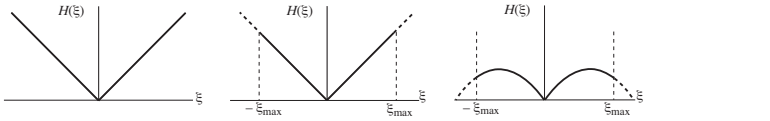
$$\hat{g}(s,\theta) = g(s,\theta) * FT^{-1}[|\xi|]$$

最初からこれを定義しておけば, フーリエ変換の必要はない

極座標→直交座標の変換は実空間で行うので,
誤差が画面全体に拡散することはない



# フィルタ関数




(a) $|\xi|$

(b) $H(\xi) = |\xi| \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right)$

(c) $H(\xi) = |\xi| \mathrm{sinc}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{\xi}{2\xi_{\max}}\right)$

高い周波数成分を増幅すると
ノイズを強調してしまうので, 抑える

※現代のCTスキャナでは,
初期状態の物体から計算で投影を求める→実際の投影と比較して, 物体を修正する
という操作を繰り返すことで, 実際の物体に近づけていく, という方法(逐次近似法)も
用いられています