2026年度春学期

統計学

第11回

分布の「型」を考える

— 確率分布モデルと正規分布

関西大学総合情報学部
浅野 晃

ちょっと前回の復習

「統計的推測」とは

調べたいデータ全体を調べられるか？

日本男性全員の身長を調べられるか？

データの一部を調べて度数分布を推測する

いや, せめて平均や分散を推測する

統計的推測

無作為抽出

データ全体から, いくつかの数値を
公平なくじびきで選ぶ

［無作為標本抽出］という

調べたい（が全部を調べるのは無理な）集団［母集団］

調べられる程度のデータ［標本（サンプル）］

度数分布で考えると

母集団の度数分布

階級値	相対度数
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

無作為抽出 →

標本の［確率分布］

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

確率分布と確率変数

つまり **母集団の度数分布（母集団分布）** ＝ **標本の確率分布**

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

標本は，
値がいくらになるかは決まっていない
しかし確率分布が決まっている
（知っているかどうかは別）

こういう数を**［確率変数］**という
（中国語では随機変数）

「標本は，確率変数（の一種）である」

母平均の推定

母集団
（日本男性全体）

母平均 μ

標本として数値を**いくつか**取り出して，
それらの平均 **［標本平均］**

標本平均は母平均に近い値になるか？

母平均が知りたい が，日本男性全員は調べられない

標本平均の期待値と**分散**は

母集団

母平均 μ
母分散 σ^2

サイズ n の標本1セット

標本平均

X_1	X_2	$\cdots$	X_n	$\bar{X}$
X_1	X_2	$\cdots$	X_n	$\bar{X}$
X_1	X_2	$\cdots$	X_n	$\bar{X}$
$\vdots$				$\vdots$

極端な値はあまりないので分散が小さくなる

母集団と同じ
期待値 μ
分散 σ^2

期待値 μ
分散 σ^2/n

標本平均の分散は，母分散の「標本サイズ分の一」になる

母平均の推定

母平均が μ
母分散が σ^2 のとき，
標本平均の期待値が μ
標本平均の分散が σ^2/n

仮に，何度も標本を抽出して，何度も標本平均を計算したとすると

分散が小さくなっているので，「たいてい，ほぼ」母平均に近い

? ? ? ?
$\bar{X}$ $\bar{X}$ $\bar{X}$ $\bar{X}$
μ

標本平均を
何度も計算しても

いつ計算しても，たいていそれほど変わらない

いま1回だけ計算した標本平均は，上のどれなのかわからないが
たいてい，ほぼ母平均に近い値だろう

「標本の大きさ」の意味

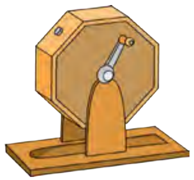
母分散が σ^2 のとき，標本平均の分散が σ^2/n

標本平均の分散に関係しているのは
標本の大きさであって，母集団の大きさは関係ない

推測の確かさに影響するのは
標本の大きさであって，
標本の大きさの，母集団の大きさに対する割合 ではない

標本の大きさとは

「10人からなる標本」の意味は，
1,000人からなる母集団でも100,000人からなる母集団でも同じ
…



理想的な無作為抽出では，復元抽出を行う
標本サイズは，
「取り出された数値の個数」というよりも
「同一の母集団から数値ひとつひとつを取り出す回数」
→ 母集団の大きさに対する割合は無関係

（非復元抽出をした場合は，計算で補正する方法がある）

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均は，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

ここから先に進みます。

分布の「型」を考える🤔

母平均の推定

いま1回だけ計算した標本平均は，
「たいてい，ほぼ」母平均に近い値だろう

どのくらい近い？

どのくらいの確率で？
はずれる確率は？

計算するには，
式で表されてないといけない

確率分布と確率変数

つまり 母集団の度数分布（母集団分布） ＝ 標本の確率分布

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

これは式ではなく数値の集まり，
計算できない

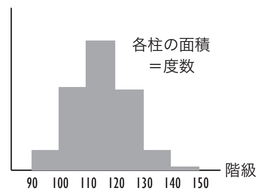
式で表す

度数分布を

階級値	選ばれる確率
162.5	15%
167.5	20%
172.5	20%
177.5	10%

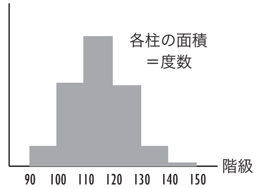
何かの式で書ける
ものと仮定する

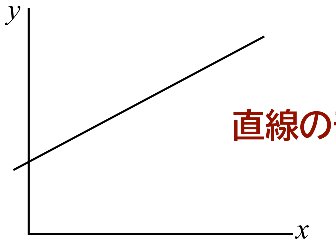
ヒストグラムが



何かの式で表される関数の
グラフであると仮定する

確率分布モデルとパラメータ





直線のモデル

$$y = ax + b$$

パラメータ

何かの式のグラフで
あると仮定する

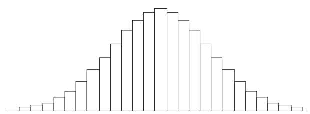
式＝[確率分布モデル]

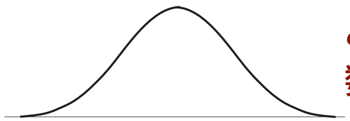
パラメータを推定すればグラフが描ける

連続型確率分布📈

ヒストグラムを式で表す

こんなヒストグラムを，
式で書けるだろうか？



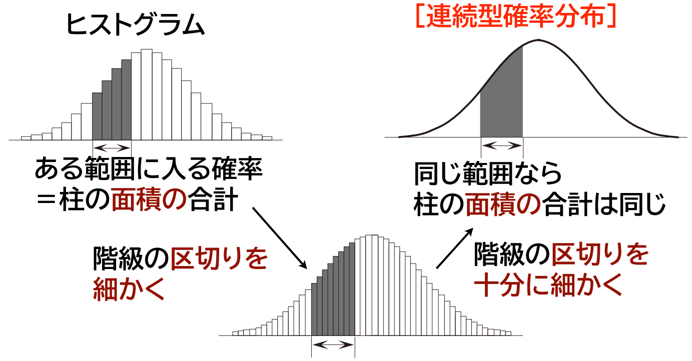


これを表す式のほうが
数学は簡単。

階級の区切り方が
どんどん細かくなって，
見えなくなったと考える

[連続型確率分布]

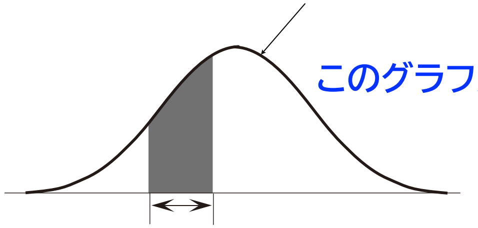
連続型確率分布



同じ範囲なら
柱の面積の合計は同じ

確率密度関数と確率

ヒストグラムの上の縁＝[確率密度関数]

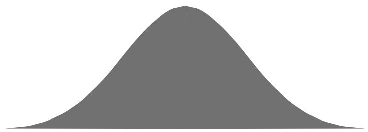


このグラフが示すのは確率ではない

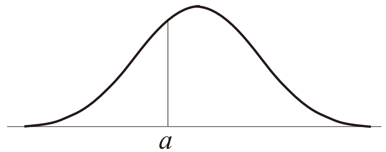
この範囲に入る確率＝この面積

＝確率密度関数の積分

確率密度関数の矛盾？



連続型確率変数が
すべての実数のうちのどれかになる確率
＝1（100%）

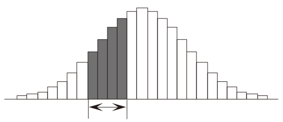


幅が0だから，面積も0

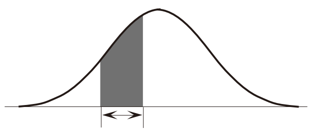
連続型確率変数が
ある特定の値 a になる確率
＝0

なんかヘン？付録テキストで

連続型確率分布は，数学の都合



こんなのより



こんなののほうが数式にしやすい

実際のデータは，有限の桁数の数字で
表されている限り，必ず離散的。

正規分布モデル

正規分布モデル

世の中には，［正規分布モデル］で表せるような母集団分布がたくさんある

長さの測定値の分布，共通テストの成績の分布　…

［中心極限定理］

母集団のばらつきの原因が，無数の独立な原因の和のとき，母集団分布は概ね正規分布になる

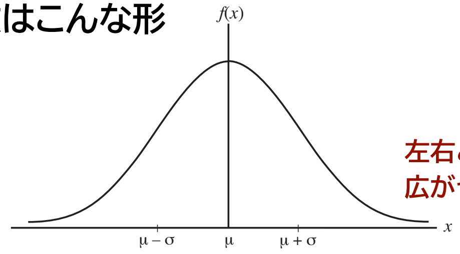
「日本男性の身長」も。

正規分布の特徴

パラメータが平均(期待値)と分散

μ　　σ^2

確率密度関数はこんな形



左右とも無限に広がっている

正規分布の特徴

パラメータが平均(期待値)と分散

μ　　σ^2

(わかりやすいものを推定すればよいので都合がいい)

確率変数 X の確率分布が
期待値 μ，分散 σ^2 の正規分布であることを

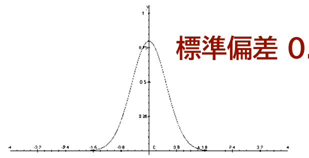
確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう　という

※英語ではnormal distribution，中国語では「常態分配」

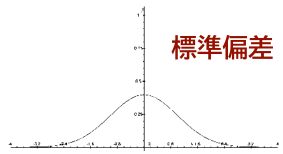
正規分布の特徴

期待値0の正規分布の
確率密度関数

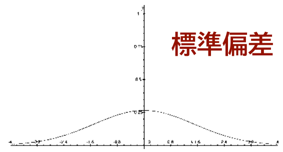
標準偏差が大きくなると
中央部の広がりが大きくなり
高さが低くなる



標準偏差 0.5



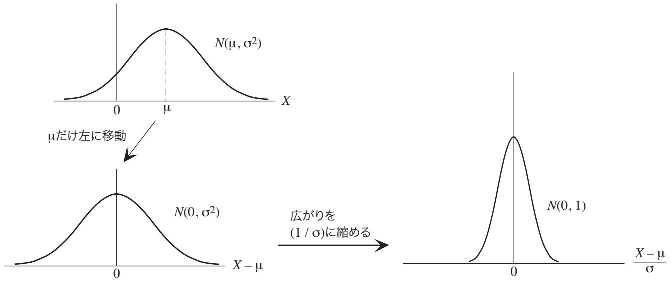
標準偏差 1.0



標準偏差 1.5

正規分布の性質1

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう　とき



$(X-\mu)/\sigma$ は $N(0,1)$ にしたがう

正規分布の性質1

確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう　とき

$(X-\mu)/\sigma$ は $N(0,1)$ にしたがう

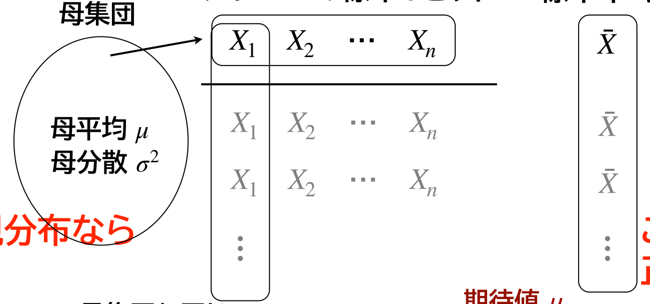
「標準得点」と同じ

変換しても,
やはり正規分布になる

$N(0,1)$ を[標準正規分布]という

正規分布の性質2

サイズ n の標本1セット　　標本平均



正規分布なら

母集団と同じ

こちらも
正規分布になる

期待値 μ
分散 σ^2/n

$N(\mu, \sigma^2/n)$

正規分布表の使いかた🔢

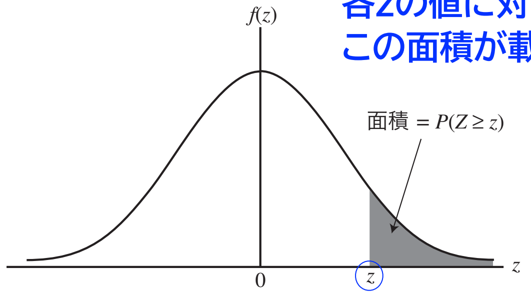
※「数表」を使って手作業で計算することは，いまではなくなりましたが，
その仕組みだけは知っておくとよいと思います。

正規分布にもとづく計算

正規分布にしたがう確率変数がある範囲に入る確率

数表を使って求める

標準正規分布について，
各zの値に対する
この面積が載っている



正規分布にもとづく計算

例）確率変数 X が $N(50,10^2)$ にしたがうとき，
X が 60 以上である確率を求めよ。

性質1により，$Z = (X - 50)/10$ と変換
Z は標準正規分布にしたがう

$X = 60$ のとき，$Z = (60 - 50)/10 = 1$

よって，求めるのは，Z が 1 以上である確率　$P(Z \geqq 1)$

正規分布にもとづく計算

$P(Z \geqq z)$ を求める

z の小数第2位

z の小数第1位まで

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	⋯
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	
			⋮				
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	⋯

$P(Z \geqq 1)$

正規分布にもとづく計算

テキストの「問題例」

確率変数 X が正規分布 $N(50,10^2)$ に
したがうとき，次の確率を求めてください。

（1） $P(X \geqq 55)$　（2） $P(45 \leqq X \leqq 60)$

X が 55 以上である確率　　X が 45 以上で 60以下である確率

考え方

$Z = (X - 50)/10$ と変換すると，正規分布の性質1から，
Z は標準正規分布 $N(0,1)$ にしたがう

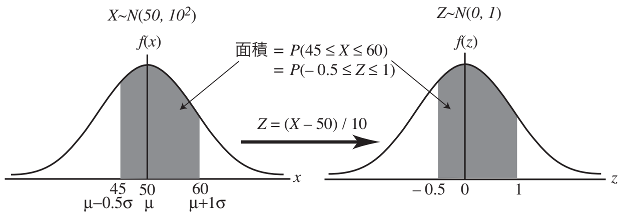
正規分布にもとづく計算

「問題例」の2

$X = 45$ のとき $Z = (45 - 50)/10 = -0.5$

$X = 60$ のとき $Z = (60 - 50)/10 = 1$

よって $P(45 \leqq X \leqq 60) = P(-0.5 \leqq Z \leqq 1)$



このグレーの部分の面積をどうやって求める？

正規分布にもとづく計算

「問題例」の2　パズルをおこなう