マセマティカル モルフォロジーの 基礎と新展開

Mathematical Morphology：Basics and Recent Advances

浅野　晃　　延原　肇

1．マセマティカルモルフォロジーとは

マセマティカルモルフォロジー（以下モルフォロジー[(注1)]）というと，「画像処理で，膨らませたりしぼませたりするやつ」というのが，一番よく知られた姿であろう．それは，モルフォロジーの，極めて重要で有用な応用の一つである．

ただ，本来モルフォロジーの背景には，「画像には構造があるはずだから，それを見いだそう」という思想がある．すなわち，今手元にある画像は，ただ漠然とピクセルが並んでいるのではなく，何らかの仕組みによって生成されたもののはずだから，その仕組みを見いだすことによって，画像の意味を理解しよう，という考えである．

モルフォロジーにおける，構造を抽出するための基本的な操作は，画像中の図形の内部に構造要素と呼ばれる小図形を「はめ込む」ことである．構造要素によって，対象の図形がその構造要素の配置によって生成されている，という構造を持つことが表現されている．「はめ込み」を行うと，元の図形は，はめ込むことのできた部分とできなかった部分に分けられる．すると，はめ込むことのできなかった部分は，構造要素に比べて小さく，その構造要素によって表される構造を持たない部分である，という分析ができる．構造要素の形やサイズをいろいろに変えれば，元の図形を構成する構造要素のサイズの分布を求めたり，図形からその構造を持たない部分を除いて再構成することが可能である．

モルフォロジーは，この「はめ込み」を定量的に取り扱う集合演算を基盤として作られた，数学の体系である．上で述べた図形のはめ込みは，2値画像においては直感的に理解できるものであり，集合演算うんぬんを持ち出すほどのものではない．しかし，集合演算を用いて抽象的に表すことで，モルフォロジーは，直感的な2値画像のはめ込みからグレースケール画像やカラー画像にも拡張され，更には画像の世界を飛び出して，一般的な順序集合にまで適用されるものとなった．本稿では，画像におけるモルフォロジー演算の基礎を説明し，画像の世界を飛び出した例として，知識工学におけるデータ分析の手法である形式概念分析との関連を紹介する[(注2)]．

2．モルフォロジー演算の基礎

2.1 オープニング

モルフォロジーの基本となる「はめ込み」を表す演算は，「オープニング（opening）」と呼ばれるものである．今，画像中の図形に対応する集合 X と，構造要素に対応する集合 B を考える．2値画像の場合，X や B の要素は，それを構成するピクセルの位置を表すベクトルと考えればよい．つまり，2値画像が「白画素の座標」の集合で表されていることになる．

X の B によるオープニングは，次の性質を持つ．

$$X_B = \{B_z \mid B_z \subseteq X,\ z \in \mathbb{Z}^2\}. \qquad (1)$$

ここで，B_z は B を z だけ移動したもの（translation）で，

浅野　晃　正員　広島大学大学院工学研究科情報工学専攻
E-mail　asano@mis.hiroshima-u.ac.jp
延原　肇　正員　筑波大学大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻
E-mail　nobuhara@iit.tsukuba.ac.jp
Akira ASANO, Member (Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Higashihiroshima-shi, 739-8521 Japan), and Hajime NOBUHARA, Member (Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba, Tsukuba-shi, 305-8573 Japan).
電子情報通信学会誌　Vol.92 No.10 pp.876-880 2009年10月

（注1）morphology という言葉は，形態への作用を研究する分野の名称として，物質科学・言語学など様々な学問で用いられている．それらに対して，数学を基盤とする morphology が mathematical morphology と名付けられたのであり，それを単に「モルフォロジー」と略してしまうのは，本来は正しくない．
（注2）本稿は，モルフォロジー演算については浅野が，形式概念分析については延原が担当した．

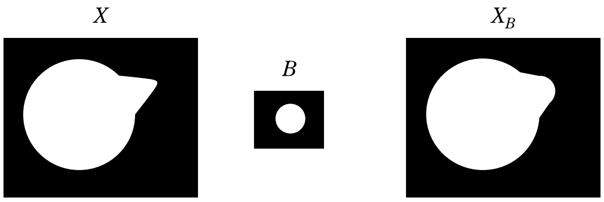

図1　オープニングの効果

$B_z=\{b+z|b\in B\}$ である．

X の B によるオープニングは「X からはみ出さないように，B を X の内部でくまなく動かしたときの，B 全体の軌跡」であり，図1のように，「X から，B が収まりきらないくらい小さな部分だけを除去して，ほかはそのまま保存する」という作用を表している．つまり，オープニングは「画像中の物体から，構造要素よりも小さな部分を取り除く」作用であり，「はめ込み」を具体的に実現する演算である．この演算を基本として，様々な構造要素による演算を組み合わせることで，画像中の物体の形・大きさを操作する種々の演算を構成する．

2.2　エロージョンとディレーション

式(1)に示すオープニングは，更に単純なピクセルごとの演算に分解して定義することができる．そのため，以下のとおり，ミンコフスキー差 $X\ominus B$ と和 $X\oplus B$ を定義する．

$$X\ominus B=\bigcap_{b\in B}X_b,\ X\oplus B=\bigcup_{b\in B}X_b. \qquad (2)$$

ミンコフスキー差については，次の性質がある．まず，$x\in X_b$ ならば $x-b\in X$ であるから，式(2)のミンコフスキー差の定義は

$$X\ominus B=\{x|x-b\in X,\ b\in B\} \qquad (3)$$

とも表せる．更に，集合 B の反転（reflection）$\check{B}$ を $\check{B}=\{-b|b\in B\}$ と定義する．これらを使うと，ミンコフスキー差は次のように表現される．

$$X\ominus B=\{x|\check{B}_x\subseteq X\}. \qquad (4)$$

なぜなら，反転の定義から $\check{B}_x\{-b+x|b\in B\}$ であるから，$\check{B}_x=\{x-b|b\in B\}$ である．このことを式(3)に当てはめると，上の関係が成り立つことが分かる．この関係は，$X\ominus B$ は「X からはみ出さないように，$\check{B}$ を X の内部でくまなく動かしたときの，$\check{B}$ の原点の軌跡」であることを示している．

また，ミンコフスキー和については，

$$\bigcup_{b\in B}X_b=\{x+b|x\in X,\ b\in B\} \qquad (5)$$

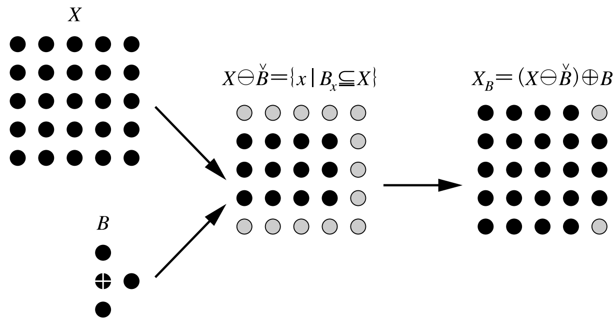

図2　オープニングの成り立ち

であるから，

$$X\oplus B=\{b+x|b\in B,\ x\in X\}=\bigcup_{x\in X}B_x \qquad (6)$$

とも表せることが分かる．このことは，$X\oplus B$ は「X の内部の各点に，それぞれ B のコピーを張り付けたもの」であることを示している．

以上の演算を使って，X の B によるエロージョン（erosion）とディレーション（dilation）という演算を，それぞれ $X\ominus\check{B}$，$X\oplus\check{B}$ と定義する．式(4)から，エロージョンについて $X\ominus\check{B}=\{x|B_x\subseteq X\}$ であることが分かる．このことは，$X\ominus\check{B}$ は「X からはみ出さないように，B を X の内部でくまなく動かしたときの，B の原点の軌跡」であり，「B によって X の周囲を削り取ったもの」であることを意味している．

オープニング X_B は，上の演算を用いて $X_B=(X\ominus\check{B})\oplus B$ と定義される．上の定義によるオープニングを図示したものが，図2である．この図で，●は図形を構成する画素を表している．上で示したとおり，X の B によるエロージョンとは「B を X の内部に収まる範囲でくまなく動かしたときの，B の原点の軌跡」だから，第1段階のエロージョンでは，X の内部で，B をはみ出さずに配置できる場所が求められる．更に，第2段階のミンコフスキー和は，これも上で示したとおり，「$X\ominus\check{B}$ の内部の各点に，それぞれ B のコピーを張り付けたもの」である．したがって，X の B によるオープニングは，先に述べたとおり「X からはみ出さないように，B を X の内部でくまなく動かしたときの，B そのものの軌跡」となる．

2.3　クロージング

クロージング(closing) X^B は，オープニング X_B に対して $[X^B]^c=(X^c)_B$ という性質を持つ．ここで X^c は $X^c=\{x|x\notin X\}$ と定義され，画像中の図形と背景を交換する演算を意味する．上の式の関係を，オープニングとクロージングの双対性 (duality) という．クロージングは，前節の基本演算を用いて，$X^B=(X\oplus\check{B})\ominus B$ と定義される．クロージングは，画像中で「物体でない部分」つ

まり背景に対してオープニングを行う演算であり，「画像中の物体にある，構造要素よりも小さな穴や欠けを埋める」作用を表す(注3)(1)．

2.4 オープニングの性質

オープニングの代表的な性質に，非拡張性（anti-extensivity），増加性（increasingness），べき等性（idempotence）の三つがあり，X，Y を図形，B を構造要素とするとき，次のように表される．

$$
\begin{aligned}
&\text{非拡張性：} X_B \subseteqq X. \\
&\text{増 加 性：} X \subset Y \Rightarrow X_B \subseteqq Y_B. \qquad (7) \\
&\text{べき等性：} (X_B)_B = X_B.
\end{aligned}
$$

すなわち，非拡張性は「オープニングによって図形は拡大しない」，増加性は「図形の包含関係はオープニングによって保たれる」，べき等性は「一度オープニングを行うと，同じ構造要素でそれ以上オープニングを行っても変化はない」ことを表している．

一般に，上の三つの性質を満たす演算を代数的オープニング（algebraic opening）という(2)．例えば，構造要素の代わりにしきい値 t を考え，「2 値画像から，面積が t 未満の連結した図形を取り除く」という演算は，代数的オープニングの一つである．この演算はエリアオープニング（area opening）と呼ばれている．

2.5 グレースケール画像の場合

グレースケール画像に対するモルフォロジーの演算を定義するには，画像中の物体を陰影（umbra）という集合で定義する．$f(x)$ を画素位置 $x \in \mathbb{Z}^2$ でのグレースケール画像の画素値とするとき，陰影 $U[f(x)]$ は次のように定義される．

$$U[f(x)] = \{(x,t) \in \mathbb{Z}^3 \mid -\infty < t \leqq f(x)\}. \qquad (8)$$

すなわち，画像中の物体を，画像中の物体の広がり（サポート）を底面とし，画素値を高さとする「立体」で表したとき，陰影は，その立体及びその底面から $-\infty$ まで広がる立体の全体に対応する．

グレースケールの構造要素も同様に定義される．そこで，$f(x)$ を対象図形，$g(y)$ を構造要素とするとき，f の g によるエロージョンとディレーションは，陰影集合に対する 2 値のモルフォロジー演算によって定義される．2.2 で示したように，エロージョンは，構造要素と図形の論理積を用いて表されている．陰影同士の論理積は，画素値（つまり「高さ」）方向においては，画素値間の下限演算となる．実際，エロージョン・ディレーションは，次のような下限・上限演算に帰着される(3),(4)．

$$
\begin{aligned}
\{f \ominus \check{g}\}(x) &= \inf_{b \in w(g)} \{f(x+b) - g(b)\}, \\
\{f \ominus \check{g}\}(x) &= \sup_{b \in w(g)} \{f(x+b) - g(b)\}.
\end{aligned} \qquad (9)
$$

ここで，$w(g)$ は g のサポートである．

この式では，元の 2 値画像に対する定義と比べて，論理積・論理和がそれぞれ下限・上限（ディジタル画像ならば最小・最大）に置き変わっている．これは，多値の真理値を扱うファジー論理における論理和・論理積と同じである．

2.6 カラー画像への拡張と，完備束への一般化

この考え方を更に拡張すると，モルフォロジーの演算を順序集合（ordered set）上の演算として定義することができる．（半）順序集合とは，その要素の少なくとも一部の組に順序が定義されており，その順序に反射律（reflexivity），反対称律（anti-symmetry），推移律（transitivity）が成り立つものである．これらは，X を集合，x，y，z を要素とし，順序を“≦”で表すとき，次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
&\text{反射律　：} \forall x \in X,\ x \leqq x. \\
&\text{反対称律：} \forall x, y \in X,\ (x \leqq y \text{ and } y \leqq x) \Rightarrow x = y. \\
&\text{推移律　：} \forall x, y, z \in X,\ (x \leqq y \text{ and } x \leqq z) \Rightarrow x \leqq z. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

要素のすべての組に順序が定義されている場合は，全順序集合と呼ぶ．部分集合 A のすべての要素よりも上位［下位］にある要素全体の集合を，A の上界［下界］という．更に，上界［下界］に最下位［最上位］の要素が存在するとき，それを A の上限［下限］という．ある順序集合の任意の部分集合に上限と下限が定義されているとき，この順序集合を完備束（complete lattice）と呼ぶ．グレースケール画像の場合に示したように，モルフォロジーの演算は上限・下限演算で表されるので，より一般的には画像処理を離れ，完備束の上での演算として定義される(5)．

カラー画像についてモルフォロジーの演算を定義するには，この考え方を用いる．カラー画像の場合は，画素値がベクトルで表現されるため，上限・下限は直感的には定義できない．そこで，何らかの意味でベクトル間の順序を定義することで，カラー画像に対する演算が定義される(6),(7)．

（注 3）モルフォロジーの基本演算の定義には，本文に挙げたもののほかに，本文のエロージョンを $X \ominus B$ で表してそのままエロージョンと呼び，本文のミンコフスキー和のことをディレーションと呼ぶというやり方がある．この定義では，式の上ではエロージョンとディレーションが非対称であるが，一方でオープニングは $(X \ominus B) \oplus B$ すなわち“エロージョン＋ディレーション”と簡単に表されるという利点がある．文献（1）には両方の定義の説明がある．

3.　モルフォロジーと形式概念分析

形式概念分析（Formal Concept Analysis）とは，「束論を数学の閉じた世界だけではなく，自然科学や社会科学全般に積極的に応用する」という理念の下，Wile によって提案されたデータ分析手法である[(8),(9)]．形式概念分析は束論を基礎にしているため，モルフォロジーで登場する各種演算が，知識工学の上で少し色彩を変えて登場してくるところが非常に興味深い．本章では，形式概念分析のアルゴリズムについて直感的に説明した後，形式概念分析とモルフォロジーの対応関係について説明する．

形式概念分析では，表1 に示されるようなコンテクスト表から，図3 のハッセダイアグラム（要素間の順序関係を，上下のノード間のリンクで表した図）で示されるコンセプトラティス（概念束）を生成し，各データの包含関係を分かりやすく図示することで知識発見を行う．ここで，コンテクスト表の{1．ハト，2．ヒト，3．カモノハシ，4．ネコ}をオブジェクト集合 X，{a．卵生，b．言葉，c．母乳}を属性集合 A と呼ぶ．以降，数字とアルファベットのみを使用し，キーワードの記載は省略する．

形式概念分析では，まずコンテクスト表の中から，任意のオブジェクト，あるいはオブジェクト集合の部分集合を選択する．この場合，具体例として{4}を選択する．オブジェクト{4}に対応する属性は，表1 のコンテクスト表より，{c}となる．今度は，この{c}を属性として持つオブジェクトを探す．この場合，{2，3，4}が対応する．オブジェクト集合の部分集合{2，3，4}が共通に持つ属性集合は，再び{c}となり，一連の操作の収束結果として（{2，3，4}，{c}）のペアが得られる．形式概念分析では，あるオブジェクト集合 X の共通属性集合全体 X' を X の極集合といい，また，属性集合 A の集まりを同時に満たすオブジェクト集合全体 A' を A の極集合と呼ぶ．極集合を作る極作用素は3 回目で収束し，これによって得られる極集合のペアをコンセプトと呼ぶ．このコンセプトを，オブジェクト集合の包含関係，あるいは属性集合の包含関係を順序として束を構成したものが，コンセプトラティスとなる．

オブジェクト集合 X に対する極集合 X' を求める極作用素を $F: X \rightarrow X'$，及び属性集合 A に対する極集合 A' を求める極作用素 $G: A \rightarrow A'$，のペア(F, G)は，X と A の間のガロア対応(Galois connection）を構成する．一方，モルフォロジーを構成する重要な数学的構造として随伴があり，これはガロア対応と本質的に同じものである．モルフォロジーでは，随伴におけるペアの作用素(F, G) がモルフォロジーのエロージョンとディレーションにそれぞれ対応する．形式概念分析とモルフォロジーの対応関係を，ガロア対応及び随伴という数学的構造の観点からまとめると表2 となる．この表において，属性集合 A の順序関係を反対にしたものが $\overline{A}$ に対応していることに注意が必要である．

2.4 で触れたとおり，オープニングやクロージングはべき等性を持つ．このべき等性は，形式概念分析における極作用素が3 回目で収束することから説明でき，興味深い対応関係が得られる．

今回登場したコンセプトラティスの例では，順序が上になるほど広い概念を表しており，各オブジェクトの階層構造が分かりやすく図示されている．また，リンクの接続関係より，カモノハシの特異な位置付けなども明らかになる．一般に，形式概念分析では，コンテクスト表からコンセプトラティスを作成し，その観測結果に基づき再びコンテクスト表の属性を調整，再びコンセプトラティスの作成という反復的な解析が行われる．この形式

表1　コンテクスト表

名前	a．卵生	b．言葉	c．母乳
1．ハト	×		
2．ヒト		×	×
3．カモノハシ	×		×
4．ネコ			×

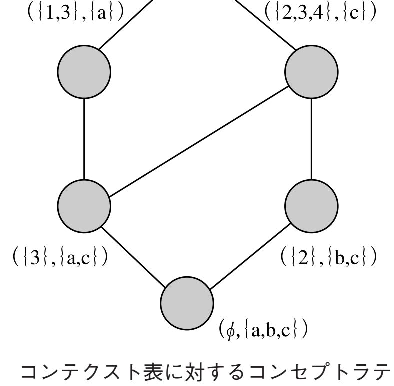

図3　コンテクスト表に対するコンセプトラティス

表2　形式概念分析とモルフォロジーの対応（属性集合の順序関係に注意）

	形式概念分析	モルフォロジー
写像 F	極作用素 (obj → att)	ディレーション
写像 G	極作用素 (att → obj)	エロージョン
写像 $G \cdot F$	極作用素 (obj → att → obj)	オープニング
写像 $F \cdot G$	極作用素 (att → obj → att)	クロージング
オブジェクト集合	X	X
属性集合	A	$\overline{A}$

概念分析の属性調整が，モルフォロジーにおける適切な構造要素の形状の選択，サイズの調整に対応している．これは，両分野における問題が興味深く対応していること，すなわち「モルフォロジーにおいて最適な構造要素は何か？」という議論，「形式概念分析において最適な属性は何か？」という問い掛けに対応することを示唆している．

4．お わ り に

モルフォロジーは，完備束，すなわち「有界」な世界において構成されている枠組みである．たとえ世界が無限に広がっているとしても，我々が現実に把握できるのは，常に有界な世界でしかない．モルフォロジーは，現実世界を記述する枠組みとしての能力を秘めており，その利用範囲が広がりつつある．

5．文献と情報源について

文献(10)，(11)はモルフォロジーの原典とその続編である．また，文献(5)は，数学の体系としてモルフォロジーを詳細に取り扱っている．また，解説書としては，文献(1)，(2)がよく知られており，解説記事には文献(3)，(4)がある．拙著：文献(12)や，筆者らが運営する「モルフォロジストの会」サイト：文献(13)も御参照頂ければ光栄である．

また，文献(14)にはモルフォロジー誕生の記録がある．これは，ほぼ2年に1度開かれている国際会議“International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)”の第6回（2002年）のProceedings巻頭に掲載されたものである．

文　　献

(1) 小畑秀文，モルフォロジー，コロナ社，1996.

(2) P. Soille, Morphological Image Analysis: Principles and Applications, 2nd Ed., Springer, 2003.

(3) P. Maragos, “Tutorial on advances in morphological image processing and analysis,” Opt. Eng., vol.26, no.7, pp.623-632, 1987.

(4) R.M. Haralick, S.R. Sternberg, and X. Zhuang, “Image analysis using mathematical morphology,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. PAMI-9, no.4, pp. 532-550, 1987.

(5) H.J.A.M. Heijmans, Morphological Image Operators, Academic Press, 1994.

(6) M.L. Corner and E.J. Delp, “Morphological operations for color image processing,“ J. Electron. Imaging, vol.8, no.3, pp.279-289, 1999.

(7) G. Louverdis, M. I. Vardavoulia, I. Andreadis, and P. Tsalides, “A new approach to morphological color image processing,”Pattern Recognit., vol.35, no.8, pp.1733-1741, 2002.

(8) B. Ganter and R. Wille, Formal Concept Aniysis: Mathematical Foundations, Springer, 1999.

(9) 鈴木　治，室伏俊明，“形式概念分析―入門・支援ソフト・応用―”，知能と情報，vol.19, no.2, pp.103-142, 2007.

(10) J. Serra, Image analysis and mathematical morphology, Academic Press, 1982.

(11) Image analysis and mathematical morphology Vol.2: Technical advances, J. Serra, ed., Academic Press, 1988.

(12) 浅野　晃，“モルフォロジと形状記述―フィルタリングとテクスチャ解析への応用―，”システム／制御／情報，vol.47, no.1, pp.18-25, 2003.

(13) 「モルフォロジストの会」
http://laskin.mis.hiroshima-u.ac.jp/morpho

(14) G. Matheron and J. Serra, “The birth of mathematical morphology,”Proc. 6th International Symposium on Mathematical Morphology, pp.1-16, CSIRO Publishing, 2002.

（平成21年3月31日受付　平成21年4月18日最終受付）

浅野　晃（正員）

昭62阪大・工・応用物理卒．平4同大学院博士課程了．同年九工大・情報工・助手，広島大・総合科学・助教授，同教授を経て，現在，同大学院工学研究科情報工学専攻教授．博士(工学)．画像科学・感性工学の研究と統計学の教育に従事．

延原　肇（正員）

平14東工大大学院博士課程了．同年カナダ，アルバータ大博士研究員．以来，順序構造型の大規模マルチメディア情報処理に関する研究に従事．現在，筑波大大学院システム情報工学研究科知能機能システム専攻講師．博士(工学)．